

פונקציות ממשיות

© ארזים

6 בדצמבר 2016

טענה 0.1 אם f חסומה בקטע $[a, b]$ ואינטגרבילית רימאן, אזי f אינטגרבילית לבג וגם

$$\int f \, dm = \int f \, dx$$

כאשר m מידת בורל-לבג (נניח $f \geq 0$ בלי הגבלת הכלליות).

הוכחה: בתרגיל בית 5 מראים שאם f אינטגרבילית רימאן אז קיימות פשוטות עבורן h_n, g_n כגון $h_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x)$ כאשר $h_n - g_n \rightarrow 0$. את מדידות f מראים כתרגיל (רמז: $h_n \rightarrow f$ כמעט בכל מקום).
קעת נקבע φ פשוטה עבורה $\varphi \leq f$ ונראה כי מתקיים

$$\int \varphi \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int h_k = \int f$$

הכיוון השני של האי שוויון ברור שכן

$$\int f \, dm = \sup_{\varphi \leq f \text{ is simple}} \int \varphi \, dm \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int h_k \, dm = \lim_{k \rightarrow \infty} \int h_k \, dx = \int f \, dx$$

אם $\varphi = f$ כמעט בכל מקום, האי שוויון ברור. אחרת, נסמן

$$A = \{x \mid \varphi(x) < f(x)\}$$

נשים לב שמתקיים

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid \varphi(x) < f(x) - \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

בשוויון האחרון רק סימנו את הקבוצות. כתרגיל, יש לוודא כי A_n, A מדידות. אם $m(A) = 0$ אז אנחנו במקרה $\varphi = f$ כמעט בכל מקום. אחרת, מסיגמא אדיטיביות של מידה, קיים n עבורו $m(A_n) = \delta > 0$. משום שהסדרה $\{h_n\}$ מונוטונית עולה וחסומה על ידי f מלמעלה, קיימת L מדידה עבורה $h_n(x) \nearrow L(x)$ ובפרט ממשפט ההתכנסות המונוטונית

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n = \int L$$

כעת נעזר בשתי טענות שנראה בתרגיל בית:

1. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת A_ε מדידה עבורה $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$ וגם לכל $x \notin A_\varepsilon$ לכל n מספיק גדול מתקיים $0 \leq L(x) - h_n(x) < \varepsilon$. רמז: $\int L - h_n \rightarrow 0$, ומניחים בשלילה.

2. אם f אינטגרבילית אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $A \subseteq X$ מדידה מתקיים

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int 1_A \cdot f \, d\mu$$

כעת, מטענה 2, עבור $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{3n}$ קיים $d > 0$ כך שלכל A מדידה עבורה $m(A) < d$ מתקיים $\int 1_A \cdot \varphi < \varepsilon_0$. כעת נבחר $\varepsilon = \min\left\{d, \frac{\delta}{3n(b-a)}\right\}$, ומטענה 1 קיימת A_ε עם התכונה המבוקשת. לכן מתקיים

$$\begin{aligned} \forall x \in A_n \setminus A_\varepsilon \quad h_k(x) - \frac{1}{n} + \varepsilon &> L(x) - \frac{1}{n} = f(x) - \frac{1}{n} > \varphi(x) \\ \forall x \in A_n^c \setminus A_\varepsilon \quad h_k(x) + \varepsilon &\geq L(x) = f(x) \geq \varphi(x) \end{aligned}$$

השתמשנו בזה שבמהלך הוכחת מדידות f , רואים כי $f = L$ כמעט בכל מקום. כעת, נקבל

$$\begin{aligned} \int h_k(x) \, dm &\geq \int_{A_n \setminus A_\varepsilon} h_k(x) \, dm + \int_{A_n^c \setminus A_\varepsilon} h_k(x) \, dm \geq \\ &\geq \int_{A_n \setminus A_\varepsilon} \varphi - \frac{1}{n} - \varepsilon + \int_{A_n^c \setminus A_\varepsilon} \varphi - \varepsilon \geq \\ &\geq \int_{[a,b]} \varphi - \int_{A_\varepsilon} \varphi - \varepsilon(b-a) + \frac{1}{n} \cdot m(A_n \setminus A_\varepsilon) \geq \\ &\geq \int \varphi - \frac{\delta}{3n} - \frac{\delta}{3n} + \frac{1}{n} (m(A_n) - m(A_\varepsilon)) > \\ &> \int \varphi - \frac{2\delta}{3n} + \frac{\delta - \varepsilon}{n} > \int \varphi \end{aligned}$$

■

משפט 0.2 (הלמה של בורל קנטלי)

1. יהי (X, \mathcal{B}, μ) מרחב מידה סופי, ותהינה $A_n \in \mathcal{B}$ כך שמתקיים $\sum \mu(A_n) < \infty$, אזי

$$\mu(\limsup A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$$

2. אם $\{A_n\}$ מייצגות מאורעים בלתי תלויים בזוגות, כלומר לכל m, n מתקיים $\mu(A_m \cap A_n) = \mu(A_m) \cdot \mu(A_n)$, אזי אם $\sum \mu(A_n) = \infty$ מתקיים

$$\mu(\limsup A_n)$$

מסקנה 0.3 בשפה פשוטה - מספיקה אי תלות בתת סדרה. באופן פורמלי, אם קיימת תת-סדרה $\{n_k\}$ כך שהקבוצות $\{A_{n_k}\}$ מייצגות מאורעות בלתי תלויים בזוגות, אזי אם $\sum \mu(A_{n_k}) = \infty$ מתקיים

$$\mu(\limsup A_n) = 1$$

תרגיל נסמן את התוצאות של הטלת מטבע הוגן בתור $0, 1$. הראו כי בסדרה אינסופית של הטלות בלתי תלויות יש אינסוף פעמים מופע של 11.

פתרון נגדיר $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, עם טופולוגיית המכפלה ועם המידה המושרה על ידי $\mu(0) = \frac{1}{2}$ נסמן כעת $\mu(1) = \frac{1}{2}$

$$A_n = \{x \in X \mid x_n = x_{n-1} = 1\}$$

התת סדרה $\{A_{2n}\}$ היא בלתי תלוייה בזוגות. וכמובן $\mu(A_{2n}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ואז $\sum \mu(A_{2n}) = \infty$, ולכן מהמקסנה של הלמה

$$\mu(\limsup A_n) = 1$$

אולם זה בדיוק אומר שכמעט בכל סדרה אינסופית של הטלות, בכל שלב, כמה רחוק שלא יהיה, יש מופע של 1, 1.