חבורות חופשיות וגרפי קיילי:

F_n - החבורה החופשית עם n יוצרים

סימון: $\{H_n \le F_n\} \Leftrightarrow$ {גרפי שריר, שורש, קשתות מכוונות וצבועות, קשירים}

תזכורת: כל תת חבורה של חבורה חופשית היא חופשית

מס' הקוסטים - מס' מחלקות השקילות, האינדקס $(F_n : H)$

$(H \le_{f.i.} F_n \Leftarrow$ הגרף סופי)

משפט: אם $H \le_{f.i.} F_n$ אז $rk(H)-1=(rkF-1)(F:H)$

הוכחה: אם גרף שריר של H סופי, יש בגרף פורש $V-1$ קשתות. בסך הכל $V \cdot rk F$ קשתות, לכן

$$rkH = V\cdot rkF-(V-1) \Rightarrow rkH-1 = V(rkF-1) = (F:H)(rkF-1)$$

מסקנה: נסמן ב- $d(G)$ את הגודל המינימלי של קב' יוצרים של חבורה G. אם G נוצרת סופית ו- $H \le_{f.i.} G$ אז $d(H)-1 \le (d(G)-1)(G:H)$

הערה: יש אפימורפיזם (הומומורפיזם על) $\varphi: F_{d(G)} \twoheadrightarrow G$

$$[F_{d(G)} : \varphi^{-1}(H)] = [G:H]$$

כל בסיס של $\varphi^{-1}(H)$ עובר דרך φ לקבוצת יוצרים של H, לכן $d(H) \le rk(\varphi^{-1}(H))$ ומכאן המסקנה בקלות.

איך מזהים נורמליות ע"י F?

אם ורק אם הגרף "נראה אותו דבר" מכל קודקוד. (הגרף שמתאים לכל חבורה צמודה של H הוא אותו גרף עם שורש אחר)

אם H נורמלי, גרף שריר הוא בדיוק גרף קיילי של המנה F/H ביחס לבסיס של F.

הגדרה: גרף קיילי בהינתן חבורה G ותת קבוצה $S \subseteq G$, $Cay(G,S)$ הוא הגרף המכוון שלו: הקודקודים = איברי G, הקשתות: לכל $s \in S$ ולכל $g \in G$ יש קשת מכוונת $g \to g \cdot s$

$f.i \longleftrightarrow$ אינסוף סופי

גרפי הליבה של Stallings:

גרף הליבה של תת-חבורה H הוא "גרף שרייר של H בלי הענפים התלויים" פורמלית: האיחוד של כל המסלולים הסגורים מהבסיס לעצמו, בלי פניות "פרסה".

כל האינפורמציה על H נמצאת בליבה – אפשר לשחזר בקלות את גרף שרייר ע"י הוספת עצים תלויים.

הערה: מתקיימת התאמה גרפי ליבה $\longleftrightarrow$ גרפי שרייר $\{H \le F\}$ תלויה בבסיס:

למשל: $F_2 = \langle a,b\rangle = \langle ab, a\rangle$

סימון: בהינתן בסיס X של F, נסמן ב-$\Gamma_X(H)$ את גרף הליבה

① $\Gamma_X(H)$ סופי $\iff$ H נוצרת סופית

② אם $\Gamma_X(H)$ סופי אז $rk\,H = e_\Gamma - (v_\Gamma - 1) = e_\Gamma - v_\Gamma + 1 = 1-\chi(\Gamma_X(H))$

③ $H \le_{f.i} F \iff \Gamma_X(H)$ "מלא", כלומר דרגה מלאה בכל קודקוד גם גרף ליבה סופי.

שאלות

① בהינתן קבוצת יוצרים $s_1, s_2, \dots, s_k \in F$ איך נמצא מפי $H = \langle s_1, \dots, s_k \rangle$? כלומר, רוצים בסיס ל-$H$/גרף ליבה של H

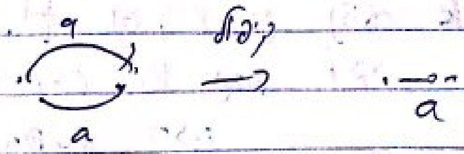
② בהינתן H ו-$w \in F$, איך נבדוק אם $w \in H$?

③ בהינתן $w \in F$, האם w הוא פרימיטיבי, כלומר חלק מבסיס?

הקיפולים (foldings) של stallings

לצורך נוחות נניח $F_2 = \langle a,b \rangle$

נניח שיש גרף סופי, עם שורש, וקשתות מכוונות וצבועות ע"י a ו-b. אם יש שתי קשתות a (או שתי b) ששתיהן יוצאות מאותו קודקוד, הזיהוי שלהן (ושל הקצה השני שלהן) נקרא קיפול



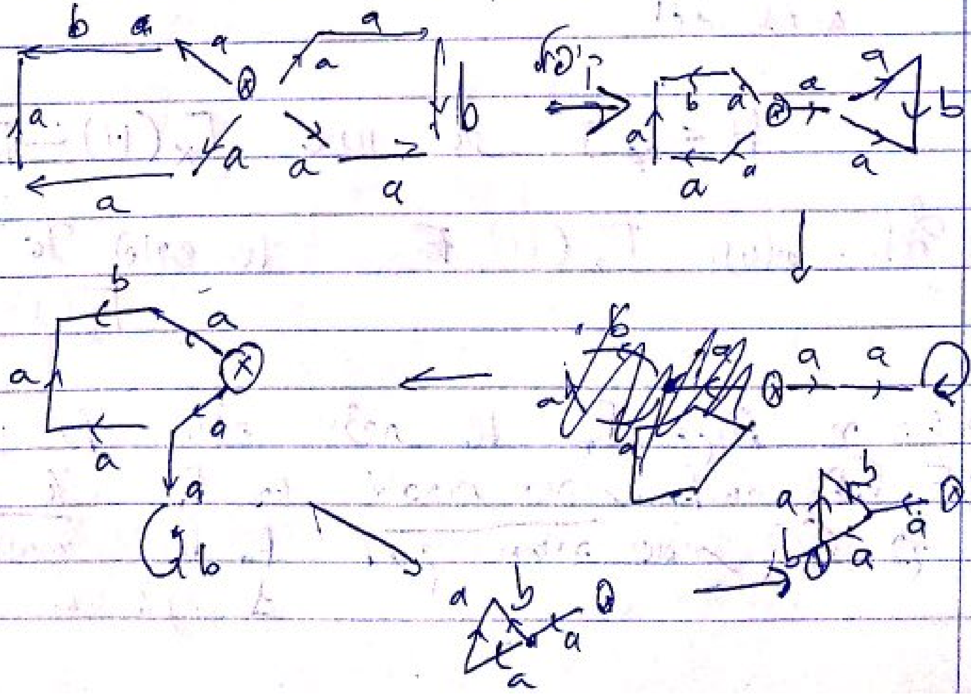
לכל גרף סופי (מכוון) $\pi_1^{labeled}(\Gamma)$ = תת החבורה של אוסף כל המילים המתקבלות כקריאה של מסלולים סגורים מהשורש לעצמו.

<u>טענה:</u> קיפולים אינם משנים את $\pi_1^{labeled}$.

<u>הוכחה:</u> תרגיל ידיים..

בהינתן $s_1, \dots, s_k \in F$, איך נמצא את $H = \langle s_1, s_2, \dots, s_k \rangle$? נבנה stallings ונקפל, עד שלא נוכל לקפל יותר.

<u>דוגמא:</u> $H = \langle aba^{-3}, a^2ba^{-2} \rangle$



מסקנה? סדר הקיפולים לא משנה.

שאלה: בהינתן $H \le F_2$ נוצרת סופית ו- $w \in F_2$, איך נדע אם $w \in H$?

תשובה: ננסה למצוא אותה כמסלול סגור מהשורש לעצמו בגרף הליבה של H.

שאלה: בהינתן $H, J \le F$ נ"ס, איך נדע אם $J \le H$?

תשובה: ננסה לבנות מורפיזם של גרפי ליבה. $H \le J \iff$ קיים מורפיזם כזה מ-$\Gamma_X(H)$ ל-$\Gamma_X(J)$.

מורפיזם של גרפי ליבה: $f: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ ששולח קודקוד לקודקוד, קשתות לקשתות, שומר על שורש, פיוניות, צבעים...

מילים פרימיטיביות וגורמים חופשיים

הגדרה: מילה $w \in F$ נקראת פרימיטיבית אם היא חלק מבסיס. ו- $H \le F$ נקראת גורם חופשי אם יש לה בסיס שניתן להרחיב לבסיס של F. ($\iff$ כל בסיס של H ניתן להרחבה לבסיס של F)

⊛ w פרימיטיבית $\iff$ $\langle w \rangle \le_{ff} F$ (גורם חופשי) וגם $w \ne 1$

⊛ אם $\Gamma_X(H) \hookrightarrow \Gamma_X(J)$ שיכון, אז $H \le_{ff} J$

ניקח עץ פורש של $\Gamma_X(H)$ ונשלים לעץ פורש של $\Gamma_X(J)$.

משפט: כל קבוצה יוצרת של F_n בגודל n היא בסיס.

למה א': F_n היא מקורבת סופית. כלומר: לכל $1 \ne w \in F_n$ יש הומומ' של F_n לתוך חבורה סופית Q כך שהתמונה של w אינה 1

$\Leftarrow$ קיימת $N \trianglelefteq F$ מאינדקס סופי כך ש $w \notin N$

נשלים את w ה"פרושה" (כנחש) לגרף ליבה סופי ושלם, קיבלנו $H \le_{f.i} F$ עם $w \notin H$

כעת נקח $N := \bigcap_{g \in F} H^g$

ומתקיים $N \le_{f.i} F$, $w \notin N \le H$, $F \overset{\text{שיכון}}{\hookrightarrow} F/H$

$\varphi : F \to Sym(F/H)$, $N = \ker \varphi$

למה ב': F_n היא "הופפיאנית" (Hopfian) כלומר, כל אנדומורפיזם $\varphi : F \to F$ על הוא איזומורפיזם.

הוכחה: נניח בשלילה ש-φ כנ"ל יש גרעין, לכן לא חח"ע. כלומר, יש $1 \neq w \in \ker\varphi$ לפי למה א', יש $f : F \to Q$ סופי, $f(w) \neq 1$. כיוון ש φ על, ניתן למצוא $w_0 := w$, $w_1 = \varphi^{-1}(w_0)$, $w_2 \in \varphi^{-1}(w_1)$ וכו' ולכל אחד מההומומורפיזמים $f \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi : F \to Q$ הם שונים.

$f \circ \varphi^k (w_m) = \begin{cases} \neq 1 & k = m \\ 1 & k > m \end{cases}$

$|Hom(F_n, Q)| = |Q|^n < \infty$ בסתירה.

הוכחת המשפט: $F_n = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ נגדיר $\varphi : F_n \to F_n$ ($\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ הבסיס של F_n) מכיוון ש $s_1, \dots, s_n$ יוצרים, φ על $\Leftarrow$ φ איזומורפיזם $\Leftarrow$ $s_1, \dots, s_n$ גם כן בסיס.

הגדרה: בהינתן $H \le J \le F$, ו J, H נוצרות סופית, המרחק בין H ל-J הוא מס' היוצרים הנוספים המינימלי של J מ H.

$$\rho(H, J) = \min\{p \mid \exists\, j_1, \dots, j_p \in J,\ J = \langle H, j_1, \dots, j_p \rangle\}$$

אם $w \in F_n$ פרימיטיבי $\Leftrightarrow$ $\rho(\langle w \rangle, F_n) = n-1$

אם $H \le_{ff} J \iff \rho(H,J)=rk(J)-rk(H)$

מה קורה כשמוסיפים ל-H איבר $\omega \in F$ אחד?

מקרה 1: הרישא והסיפא הארוכות ביותר של ω ב-H אינן מכסות את כל ~~מילה~~ ω. נוסיף חלק ביניים.

מקרה 2: הרישא והסיפא מכסות את כל ω. נצמיד את הקודקודים ונקפל.

משפט: יהיו $H \le J \le F$ ח"נ נ"ס. תהי M התמונה של J שמתאימה לתמונה של $\Gamma_X(H)$ בתוך $\Gamma_X(J)$

i אזי $\rho(H,J)=\rho(H,M)+\rho(M,J)$

$\rho(H,M)=rk(J)-rk(M)$

ii יש $m_1,\dots,m_r$ כך ש-$\rho(H,M)$ שהוספתם לפי הסדר היא תמיד מהטיפוס השני: של זיהוי של קודקודים וקיפול

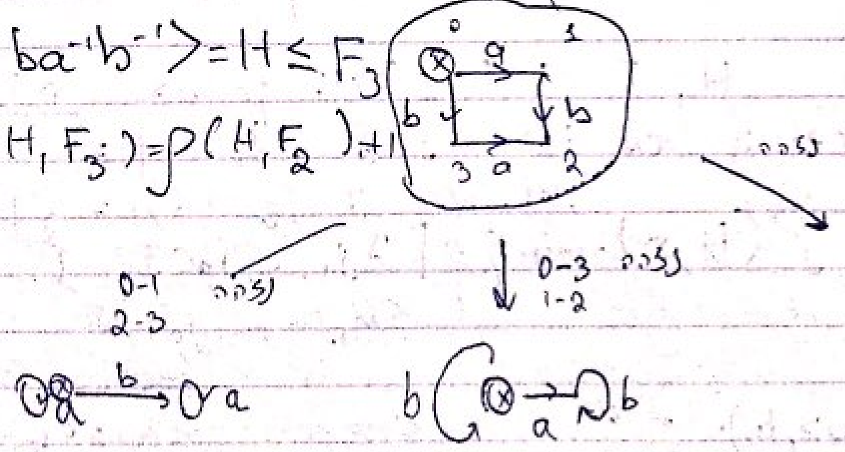
מסקנה: יש אלגו' - לחישוב $\rho(H,J)$
- לזיהוי פרימיטיביים
- לזיהוי גורמים חופשיים

(נזכיר בשיעור הבא)

דוגמא:

$\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle = H \le F_3$

$\rho(H,F_3)=\rho(H,F_2)+1$



וכל אלה מקבלים את F_2, לכן H פרימיטיבי