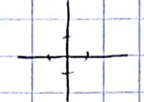
הרצאה 10

יריעות - manifolds

הגדרה - מרחב טופולוגי X נקרא **יריעה** n-מימדית, $n \geq 1$
אם: 1. לכל נקודה $x \in X$ קיימת סביבה U_x הומיאומורפית ל- $\mathbb{R}^n$ (סביבת קואורדינטות)
2. T_2 (hausdorff)
3. S_2

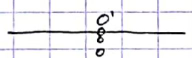
למה - 3 דרישות (2), (3) בלתי תלויות ב- (1) וזה בזה.

הוכחה:
א) X מרחב הבא T_2, S_2 אבל לא (1):
נקח $\{xy=0\} \subset \mathbb{R}^2$:



לראשית אין סביבה
הומיאו' ל- $\mathbb{R}$ (או ל-$\mathbb{R}^m$)
למה?
כי אם נקח U_0 סביבה של $(0,0)$. אז ל- $U_0 \setminus \{0\}$ יש לפחות 4 רכיבי קשירות.
אבל $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ - 2 רכיבי קשירות
$\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ - קשיר ל- $m \geq 2$ (טריק הפאנצ'ר!)
אז X לא מק"ם את (1)

ב - X בעל (1) ו- S_2 אבל לא T_2
נקח $Y = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$, ו- $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{Id} \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}$ ראשון, $\mathbb{R}$ שני
נגדיר $X = Y/F$ ונקבל:



ל- $0'$, 0 אין סביבות זרות, לכן אין T_2.
אבל כל סביבה פתוחה הומיאומורפית ל- $\mathbb{R}$, וברור שמתקיים S_2.

ג - X בעל (1) ו- T_2 אבל לא S_2
נקח:
$X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathbb{R}$ איחוד זר, $|A| > \aleph_0$

למה זה עובד? תרגול.

דוגמאות - $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ לא קומפקטיות
- S^1, S^n קומפקטיות
איך מוכיחים את (1) על ~~[illegible]~~ ספרה? לוקחים סביבה של נקודה, ומטילים על מישור $\perp x$.
- B^n - כדור פתוח, יריעה n מימדית לא קומפ'.

תכונות של יריעות

למה - כל יריעה היא קומפקטית מקומית.
יתר על כן לכל נקודה $x \in X$ ולכל סביבה $x \in U$ קיימת תת-סביבה $x \in V \subset U$
כך ש- $cl(V) \cong \bar{B}$
כדור סגור

הוכחה - נסתכל בסביבת קואורדינטות של x, U_x. $U_x \cong \mathbb{R}^n$
$U \cap U_x$ - סביבה של x הומיאו' לקבוצה פתוחה $x \leftrightarrow 0 \in V' \subset \mathbb{R}^n$
קיים $B_0(\varepsilon) \subset V'$, $\bar{B}_0(\varepsilon) \subset V'$.
מגדירים את $V \in \varphi^{-1}(B_0(\varepsilon))$, $\bar{V} = \varphi^{-1}(\bar{B}_0(\varepsilon))$

* הערה - כמסקנה מכך, לכל יריעה יש קומפקטיפיקציה חד נקודתית.
הקח"נ אינה בהכרח יריעה!

משפט - מימד של יריעה מוגדר באופן יחיד
פירוש: $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$ עבור $m \neq n$.
הוכחנו עבור $m=1$, וכו.

הוכחה - נדרשים כלים נוספים, לא נראה בקורס הזה. אבל זה נכון

משפט - מכפלה של יריעות היא יריעה - $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$

הוכחה - $x \in X$, $y \in Y$ | $(x,y) \in X \times Y$

$x \in U_x \subset X$ $y \in V_y \subset Y$ | $(x,y) \in U_x \times V_y$

$\underset{\mathbb{R}^n}{\approx}$ $\underset{\mathbb{R}^m}{\approx}$ | $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \overset{\approx}{=} \mathbb{R}^{n+m}$

דוגמאות - טורוס - $T^2 = S^1 \times S^1$ יריעה דו-מימדית קומפקטית
- גליל - $S^1 \times \mathbb{R}$

משפט - כל יריעה קשירה מסילתית מקומית.
כל רכיב קשירות הוא רכיב קשירות מסילתי.

הוכחה - תחזרו להגדרה והכל מיד מובן

משפט - אם X יריעה קומפקטית אז' היא בעלת מס' סופי של רכיבי קשירות

הוכחה - תרגיל אלמנטרי -תחשבו.

משפט - כל יריעה היא נורמלית ומטריזבילית

הוכחה - לפי משפט ~~הטפגעש~~ יש לבדוק רק רגולריות.
תרגיל.

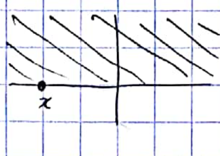
יריעות עם שפה - (manyfolds with boundaries)

הגדרה - X נקראו יריעה n- מימדית עם שפה אם:
1) לכל נקודה $x \in X$ קיימת סביבה $U_x \approx \mathbb{R}^n$ או $U_x \mathbb{R}^n_+$, ויש נקודות מהסוג השני
2) T_2
3) S_2

$\{(x_1, \dots x_n) \mid x_n \geq 0\}$
כאשר X מתאימה ל-0

נקודות $x \in X$ עם $U_x \approx \mathbb{R}^n$ נקראות נקודות פנימיות $\mathring{X} \subset X$
נקודות $x \in X$ עם $U_x \approx \mathbb{R}^n_+$ נקראות נקודות שפה $\partial X \subset X$

דוגמאות - $\mathbb{R}^n_+$



$\partial \mathbb{R}^n_+ = \{x \mid x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1}$
ההומיאו' יהיה $\varphi : U_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n_+$ הזזת x לראשית 0.

- $\overline{B^n}$ כדור סגור $\partial \overline{B^n} = S^{n-1}$

הגדרה - יריעה קומפקטית ללא שפה נקראת יריעה סגורה

משפט - $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$ אינם הומיאומורפים

הוכחה - לא נוכל להוכיח, אבל זה נכון

מסקנה - נקודות פנימיות הן שונות מנקודות שפה

משפט - תהי X יריעה n-מימדית עם שפה, $\partial X \neq \emptyset$. אזי:
א) $\mathring{X} \subset X$ תת קבוצה פתוחה שהיא יריעה n-מימדית ללא שפה
ב) $\partial X \subset X$ תת"ק סגורה שהיא יריעה $(n-1)$-מימדית ללא שפה

הוכחה - "נו, נוכיח אבל זה ממש אלמנטרי" - ע. שוסטין

א) $\mathring{X}$ יריעה n-מימדית ללא שפה
- לפי הגדרה, פתוחה $x \in U_x \subset X$
$U_x \simeq \mathbb{R}^n$, אז לכל נקודה $y \in U_x \subset X^\circ$ נמצא גם סביבת קואורדינטות
ב) $\partial X = X \setminus X^\circ$ תת"ק סגורה.
$x \in U_x \overset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}^n_+$, $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \subset U_x$ - נקודות שפה

$$\mathbb{R}^{n-1} \simeq B^{n-1}_x(\varepsilon) \simeq \varphi^{-1}(B^{n-1}_x(\varepsilon)) \subset \partial X$$

מסקנה - אם X יריעה n-מימדית עם שפה, X קומפקטית, אזי ∂X יריעה $(n-1)$ מקומית סגורה

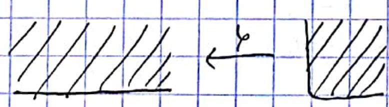
משפט - יהיו X^n, Y^m יריעות עם שפה ממימד n,m בהתאמה.
אזי $X \times Y$ יריעה $(m+n)$ ~~[illegible]~~ מימדית עם שפה ומתקיים:
$$\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$$

הוכחה - $\mathring{X} \times \mathring{Y} \subset (X \times Y)^\circ$
$(x,y) \in X \times Y$
1) $x \in \partial X$, $y \in \mathring{Y}$
2) $x \in \mathring{X}$, $y \in \partial Y$
3) $x \in \partial X$, $y \in \partial Y$

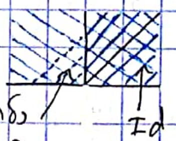
לכל המקרים האלו יש סביבה $\simeq \mathbb{R}^{n+m}_+$:
1) $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{n+m}_+$
2) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \simeq \mathbb{R}^{n+m}_+$
3) $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \simeq \mathbb{R}^{n+m}_+$

נסביר את (3) - למה $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \simeq \mathbb{R}^2_+$?

דוגמה אחת לזה $\varphi = z^2$ אם מסתכלים על דג ימין כמספרים מרוכבים



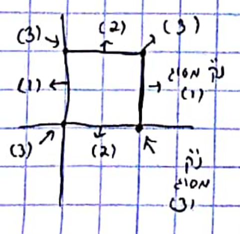
דוגמה יותר כללית:



נלקח מדג ימין נעתיק בהטלה כך שתתחיל על ציר x במקום על ציר y. זה ~~[illegible]~~ ההומיאו'

במקרה הרב מימדי עושים אותו דבר

דוגמה - $X = Y = I = [0,1]$, ביצוע: $I^2 = X \times Y$



משפט - כל יריעה עם שפה מקיימת:
1) קומפקטית מקומית
2) קשירה מסילתית מקומית
3) נורמלית ומטריזבילית

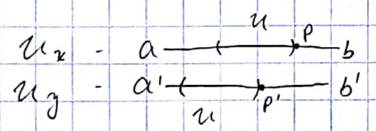
יריעות חד מימדיות

משפט - כל יריעה חד מימדית קשירה הומיאומורפית ל-
א) S^1 אם היא סגורה
ב) $\mathbb{R}$ אם היא לא קומפקטית ללא שפה
ג) $[0,\infty)$ אם היא לא קומפקטית עם שפה
ד) $[0,1]$ אם היא קומפקטית עם שפה

למה - תהי X יריעה חד מימדית ללא שפה. $x\neq y\in X$. $\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y$ סביבות קואורדינטות.
אזי:
1) $\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y$ או ריק
או קשיר
או בעל שני רכיבי קשירות
2) קיימת העתקת שיכון $\mathcal{U}_x\cup\mathcal{U}_y\to\begin{cases}\mathbb{R}\\ S^1\end{cases}$

הוכחה - (1) נניח ש- $\mathcal{U}=\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y\neq\emptyset$.
$\mathcal{U}$ פתוחה ב-$\mathcal{U}_x$ וב-$\mathcal{U}_y$
א - נניח $\mathcal{U}_x\subset\mathcal{U}_y$ או $\mathcal{U}_y\subset\mathcal{U}_x$
אזי בה"כ $\mathcal{U}=\mathcal{U}_x$ $\Longleftarrow$ רכיב קשירות 1 (כי $\mathbb{R}$ קשיר), $\mathcal{U}_x\cong\mathbb{R}$

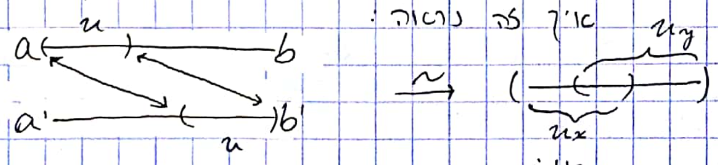
ב - נניח $\mathcal{U}_x\not\subset\mathcal{U}_y$, $\mathcal{U}_y\not\subset\mathcal{U}_x$.
אזי $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}_x\cong(a,b)$
אזי $\mathcal{U}\cong\mathcal{U}'\subset(a,b)$
↳ איחוד זר של קטעים פתוחים
כל קטע פתוח יכול להיות באמצע a—( )—b
בקצה a——( )b
בקצה השני a( )——b
אבל זה בלתי אפשרי שקטע יהיה באמצע, כי זו סתירה ל-T_2.
הסבר:



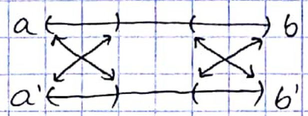
$p\neq p'$, כי $p,p'\notin\mathcal{U}_x\cap\mathcal{U}_y$, וכל סביבה שלהם מכילה חלק מ-$\mathcal{U}$,
לכן החיתוך של הסביבות לא ריק

לכן יש או רכיב קשירות אחד (צמוד לקצה אחד)
או שני רכיבי קשירות (צמודים לכל קצה)
איך זה נראה:

ההתאמה חייבת להיות כך כדי להימנע מהסתירה ל-T_2 מקודם



או:



(2) - אם החיתוך ריק או עם רכיב קשירות אחד, יש שיכון ל-$\mathbb{R}$, אחרת $S^1\cong\mathcal{U}_x\cup\mathcal{U}_y$

הוכחת המשפט (X סגורה)

נניח ש- X סגורה. אז $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$

בונים את האיחוד באינדוקציה:

$\mathcal{U}_1 \simeq (a,b)$

$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$ ← רכיב 1 - $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \simeq (a_2, b_2)$

← שני רכיבים - $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \simeq S^1$

נוסיף את $\mathcal{U}_3$, כדי לא לסתור את בד, חייב להתקיים $S^1 \simeq \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3$
אם $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \simeq S^1$, ואחרת פשוט נקבל קטע ארוך יותר.

בסוף נקבל מעגל ולא קטע ארוך מדרישת הקומפקטיות.

טענה - X לא קומפקטי ללא שפה

קיים כיסוי בן מניה $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ ע"י סביבות קואורדינטות
כך ש- $\mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_{i+1} \neq \emptyset$, $i \geq 1$

הוכחה - תרגיל

הוכחת המשפט - (X לא קומפקט ללא שפה)

$\mathbb{R} \simeq X = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a, b_i)$, $b_1 < b_2 < \dots$

Scanned by CamScanner