סגור ורציפות סקוונציאליים (סדרתיים)

הגדרה - $A \subset X$ תת מרחב.

סגור סקוונציאלי - $cl_s(A) = \{x \in X \mid x = \lim_{n\to\infty} a_n \ , a_n \in A\}$

אם $A = cl_s(A)$ אז A סגורה סקוונציאלית.

* הערה - תמיד $A \subset cl_s(A)$, כי לכל $a \in A$, $a = \lim_{n\to\infty} a$

למה - תמיד $cl_s(A) \subset cl(A)$

אם A סגורה אז $A = cl_s(A) = cl(A)$

הוכחה - יש להראות שגבול של סדרה שייך ל- $cl(A)$. נובע מהגדרת הסגור.

משפט - אם X מקיים S_1, אזי $cl_s(A) = cl(A)$ לכל $A \subset X$.

* הערה - אם X מטרי או S_2 אזי X מקיים S_1 והמשפט מתקיים.

הוכחה - יש להוכיח שכל $x \in cl(A)$ הוא גבול של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$.

נקח בסיס סביבות ב- x $U_1, U_2 \dots$ (קיים מ- S_1)

נסתכל ב- $V_1 = U_1 , V_2 = U_1 \cap U_2 , \dots , V_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \dots$ ← גם הם בסיס סביבות (למה? תרגיל).

קל לראות $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$

נבנה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: $V_1 \cap A \neq \emptyset$, אז נקח $a_1 \in V_1 \cap A$

$V_2 \cap A \neq \emptyset$, אז נקח $a_2 \in V_2 \cap A$

כי x בסגור

נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = x$

לכל סביבה $x \in U$, קיים N, $x \in U_N \subset U$

ואז- $a_N, a_{N+1}, \dots \in V_N \subset U$. וסיימנו.

הגדרה - העתקה $f: X \to Y$ נקראת רציפה סקוונציאלית אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ המתכנסת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

למה - $f: X \to Y$ רציפה סקוונציאלית $\longleftrightarrow$ מקור של כל תת קבוצה $B \subset Y$ סגורה סקוונציאלית הוא סגור סקוונציאלית

הוכחה - ⇐ נניח ש- f רציפה סקוונציאלית. נקח $B \subset Y$ סגורה סק' ונבדוק ש- $f^{-1}(B)$ סגור סק' ב- X.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f^{-1}(B)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. $x_0 \in f^{-1}(B)$?

$\lim_{n\to\infty} \underset{B}{f(x_n)} = \underset{B}{f(x_0)} \Longleftarrow x_0 \in f^{-1}(B)$!

צד שני בעמוד הבא

הסימן הוכחה: $\Rightarrow$ נניח $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. האם $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$?

נניח בשלילה ש- $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} f(x_0)$.

קיימת סביבה $f(x_0)\in U$, $f(x_{n_k})\notin U$

נסתכל בקבוצה $B = Y\setminus U$ סגורה. אזי היא סגורה סק'.

אזי $A = f^{-1}(B)\subset X$ סגורה סק'.

אזי - $x_{n_k}\in f^{-1}(B) = A$, $f(x_{n_k})\in B$

ונקבל $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in f^{-1}(B) = A$

$\overset{\cap}{A} \Rightarrow \overset{\cap}{A}$

אז $f(x_0)\in B$. סתירה.

משפט - 1) אם $f:X\to Y$ רציפה אזי f רציפה סקוונציאלית

2) בהנחה ש- X מקיים את S_1, כל $f:X\to Y$ רציפה סק' היא רציפה.

הוכחה - 1) f רציפה.

נקח $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ונראה ש- $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

לכל סביבה $f(x_0)\in U\subset Y$. $x_0\in f^{-1}(U)$ סביבה פתוחה לכן קיים N

כך שלכל $n\geq N$, $x_n\in f^{-1}(U) \Leftarrow n\geq N$, $f(x_n)\in U$!

2) נקח $B\subset Y$ סגורה ונראה ש- $f^{-1}(B)\subset X$ סגורה.

S_1

B סגורה סק' $\xrightarrow{\text{למה}}$ $f^{-1}(B)\subset X$ סגורה סק'

הערה - אם X מטרי או S_2 אז רציפות $\longleftrightarrow$ רציפות סק'.

קומפקטיות

הגדרה - מרחב טופולוגי X נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ (פתוחות)

קיים תת כיסוי סופי: $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$

דוגמה - משפט היינה-בורל - קטע סגור הוא קומפקטי.

הוכחה - מספיק להוכיח עבור $I=[0,1]$ (כי קומפקטיות נשמרת תחת הומיאומורפיזם)

$[0,1] = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$.

נגדיר $t_0\in[0,1]$ כך ש- $t_0 = \sup \underbrace{\{t\in[0,1] \mid [0,t] \text{ מכוסה סופית}\}}$

לא ריקה מפני שעבור $t=0$, $[0,0] = 0\in U_{\alpha_0}$

נראה ש- $t_0 = 1$.

נניח בשלילה ש- $t_0 < 1$, $t_0\in U_{\alpha_0}$. $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)\subset U_{\alpha_0}$

$$[0, t_0 + \tfrac{\epsilon}{2}] = \underbrace{[0, t_0 - \tfrac{\epsilon}{2}]}_{\text{מכוסה סופית}} \cup \underset{\substack{\cap \\ U_{\alpha_0}}}{[t_0 - \tfrac{\epsilon}{2}, t_0 + \tfrac{\epsilon}{2}]}$$

מכוסה סופית

אז $t_0 + \frac{\epsilon}{2} > t$, סתירה.

הגדרה - X קבוצה, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ אוסף תתי קבוצות.
האוסף נקרא **מרוכז** אם לכל תת אוסף סופי $\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

משפט - X מ"ט קומפקטי $\longleftrightarrow$ לכל אוסף סגור ומרוכז $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$, החיתוך $\bigcap_{\alpha\in A} A_\alpha \neq \emptyset$

הוכחה: $\Leftarrow$ X קומפקטי, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ סגור ומרוכז.
נניח בשלילה ש-

$$\bigcap_{\alpha\in A} A_\alpha = \emptyset$$

אז

$$\bigcup_{\alpha\in A} \underbrace{(X\setminus A_\alpha)}_{U_\alpha \text{ פתוחות}} = X$$

ולכן

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X$$
$$\Downarrow$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} = \emptyset$$

— האוסף אינו מרוכז, סתירה.

$\Rightarrow$ אותו דבר. תרגיל.

משפט - יהי X מ"ט, $A\subset X$ תת מרחב.
A קומפקטי $\longleftrightarrow$ לכל $A\subset\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ קיים תת כיסוי סופי $A\subset\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$

הוכחה - תרגיל.

משפט - יהי X מ"ט קומפקטי, $A\subset X$ סגורה. אזי A קומפקטית.

הוכחה - נקח כיסוי פתוח $A\subset\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, $\tilde{U} = X\setminus A$ פתוחה
אזי -

$$\tilde{U}\cup\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$$

קיים תת כיסוי סופי של X $\tilde{U}\cup\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X$. אז $A\subset\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$

משפט - יהי X מ"ט בעל T_2 או Hausdorff.
אזי אם $A\subset X$ קומפקטי הוא סגור.

הוכחה - נבדוק ש- $X\setminus A$ - קבוצה פתוחה.
נקח $x\in X\setminus A$ ונבנה סביבה $x\in U\subset X\setminus A$.
לכל $y\in A$ קיימות סביבות $x\in U_y$, $y\in V_y$, $U_y\cap V_y=\emptyset$
נשים לב ש-

$$A\subset\bigcup_{y\in A} V_y, \text{ לכן } A\subset\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

אז $x\in U=\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, $U\cap A=\emptyset$.

משפט - תהי $f:X\to Y$ רציפה. $A\subset X$ קומפקטית $\Leftarrow$ $f(A)\subset Y$ קומפקטית

הוכחה - $f(A)\subset\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\subset Y$ $\Longleftarrow$ $A\subset\bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)\subset X$ פתוח

$$\Downarrow$$
$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i}) \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\supset f(A)$$

למה - תהי $f:X\to Y$ רציפה. אזי f העתקה סגורה (תמונה של קבוצה סגורה היא סגורה)
T_2 ו- קומפקטי

הוכחה - $A\subset X$ סגורה ← A קומפקטית ⟼ $f(A)\subset Y$ קומפקטית
↓ T_2
$f(A)\subset Y$ סגורה.

מסקנה - תהי $f:X\to Y$ רציפה, חח"ע, ועל. ← f הומיאומורפיזם.
T_2 ו- קומפקטי

הוכחה - $f^{-1}:Y\to X$ קיימת מחח"ע ועל.
f סגורה ← המקור של כל קבוצה סגורה סגור (ב- f^{-1}), וזו הגדרת רציפות.

מסקנה - $f:X\to Y$ רציפה, חח"ע, אזי $f:X\to f(X)$ הומיאומורפיזם.
T_2 ו- קומפקטי

דוגמה - $\mathbb{R}$ אינו קומפקטי: $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n-\varepsilon,\ n+1+\varepsilon)=\mathbb{R}$
לא ניתן להסיר אף קטע.

קומפקטיות מקומית וקומפקטיות חד-נקודתית

הגדרה - מ"ט X נקרא ~~[illegible]~~ קומפקטי מקומית
אם לכל נקודה $x\in X$ קיימת סביבה $x\in U\subset X$ עם $Cl(U)$ קומפקטי.

למשל: X קומפקטי ← X קומפקטי מקומית.

דוגמה - $\mathbb{R}$ קומפקטי מקומית - $x\subset(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$, $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ קומפקטי.

הגדרה - יהי X מ"ט קומפקטי מקומית (ובפרט T_2 (Hausdorff)).
נגדיר $Y=X\cup\{p_\infty\}$ עם:
$\Omega_X\cup\{Y\setminus C\}=\Omega_Y$
לכל $C\subset X$ קומפקטית

למה - Ω_Y טופולוגיה

הוכחה - 1) $\bigcup_{i=1}^{n}C_i\subset X$ - גם קומפקטי
2) $\bigcap_{\alpha\in A}C_\alpha\subset X$ - גם קומפקטי
קומפקטי

1- $C_1\cup C_2\subset\bigcup_{\beta\in B}U_\beta$ פתוח

$C_2\subset\bigcup_{j=1}^{l}U_{\beta_j}$, $C_1\subset\bigcup_{i=1}^{k}U_{\beta_i}$, אז $C_1\cup C_2\subset\bigcup_{i=1}^{k}U_{\beta_i}\cup\bigcup_{j=1}^{l}U_{\beta_j}$

2- $\bigcap_{\alpha\in A}C_\alpha$ סגור ← קומפקטית.
קומפ'
↓ T_2
סגורות

דוגמה - אם X קומפקטי אזי p_∞ - נקודה פתוחה ב- Y.

משפט - אם X לא קומפקטי, אבל קומפקטי מקומית ובעל T_2,
אזי $Y = X\cup\{p_\infty\}$ הוא קומפקטי בעל T_2 ו- $X\subset Y$ תת מרחב בטופולוגיה המושרית.

הוכחה - 1) קומפקטיות.

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = Y \quad , \quad p_\infty \in U_{\alpha_0} = Y\setminus \underbrace{C}_{\text{קומפקטית ב- } X}$$

$$C \subset \bigcup_{\alpha\in A\setminus\{\alpha_0\}} U_\alpha$$

$$C \subset \underbrace{\bigcup_{\alpha\neq\alpha_0} (U_\alpha\setminus\{p_\infty\})}_{\text{כיסוי פתוח}} \Rightarrow C\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\setminus\{p_\infty\}$$

$$U_{\alpha_0}\cup\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = Y$$

2) T_2

קיימת $x\in U\subset X$

$$cl(U) = \underbrace{C}_{\text{קומפקטי}}\subset X$$

$$V = Y\setminus C \ni p_\infty \quad , \quad U\cap V = \emptyset$$

דוגמה - $X = \mathbb{R}$
אזי $Y = S_1$

הערה - Y מוגדר באופן יחיד עד כדי הומיאומורפיזם.

מרחבי S_2 קומפקטיים

הגדרה - יהי X מ"ט, $A\subset X$, נקודה $x\in X$ נקראת **נקודת הצטברות אינסופית** עבור A אם לכל סביבה $x\in U\subset X$ החיתוך $|U\cap A| = \infty$

למה - יהי X בעל T_1, $A\subset X$ סגורה.
אזי כל נקודה $a\in A$ היא או מבודדת או נקודת הצטברות אינסופית

הוכחה - תרגיל

הגדרה -
1) X נקרא **קומפקטי סדרתית** אם לכל סדרה קיימת תת-סדרה מתכנסת
2) X נקרא **קומפקטי קשונטבילית** אם מכל כיסוי פתוח בן מנייה ניתן לבחור תת כיסוי סופי
3) X נקרא **קוואזי קומפקטי** אם לכל סדרה יורדת של תתי קבוצות סגורות החיתוך לא ריק.

משפט - יהי X מ"ט בעל S_2.
אזי הדברים הבאים שקולים:
1) X קומפקטי
2) לכל $A\subset X$ אינסופית קיימת נקודת הצטברות אינסופית.
3) X קומפקטי סדרתי
4) X קוואזי - קומפקטי
5) X קומפקטי קשונטבילי