טופולוגיה - שבוע 6

קומפקטיות

מרחבים קומפקטיים בולי S_2 (בסיס בן מניה לטופולוגיה)

משפט: יהי X מט S_2, אזי הבאים שקולים:

(1) X קומפקטי.
(2) לכל תת קבוצה $A\subset X$ אינסופית קיימת נקודת הצטברות אינסופית
(3) X קומפקטי סקבנציאלית
(4) X קוואזי קומפקטי.
(5) X קומפקטי קאונטבילי.

הוכחה: $(1)=(5)\Leftarrow(4)\Leftarrow(3)\Leftarrow(2)\Leftarrow(1)$

$(2)\Leftarrow(1)$ הראינו

$(3)\Leftarrow(2)$ הראינו, נחזור: נקח סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ונבנה תת סדרה מתכנסת.
(א) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סופית $\Leftarrow$ $x_{n_k}=a$, $\lim x_{n_k}=a$
(ב) $A=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינסופית. קיימת נקודת הצטברות אינסופית $x_0\in X$,
נקח בסיס סביבות בן מניה יורד $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ של x_0. $|U_1\cap A|=\infty$
נקח $x_{n_1}\in U_1$, $|A\cap U_2|=\infty$ $x_{n_2}\in U_2$, $n_2>n_1$? $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$

$(4)\Leftarrow(3)$ נקח $F_1\supset F_2\supset\dots\supset F_n\supset\dots$ סגורות לא ריקות.
נראה שיש חיתוך. בכל F_n נקח נקודה $x_n\in F_n$ כלשהי:
קיימת תת-סדרה מתכנסת; $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$
~~החל~~ לכל $\exists K$, $k\geq K$

$$x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}F_{n_K}=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n \Leftarrow x_{n_k}\in F_{n_K}\supset F_{n_k}$$

$(5)\Leftarrow(4)$ $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$ (פתוחות), $\emptyset\neq\tilde{F}_n=X\setminus U_n$ סגורה.
נגדיר: $F_n=\bigcap_{i=1}^{n}\tilde{F}_i$ $F_1\supset F_2\supset\dots\supset F_n\supset\dots$ (א) אם $F_n=\emptyset$.
אז $X=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$. (ב) אם $F_n\neq\emptyset$ $\forall n$, אז:

, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ כ $X \not\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, סתירה

$(5) \Leftarrow (1)$ משפט לינדלוף Lindelöf (S_2), אם כיסוי פתוח, ניתן לבחור תת כיסוי בן מניה $\overset{(5)}{\Longrightarrow}$ קומפקטי.

מרחבים קומפקטיים מטריים:

הגדרה: יהי (X,ρ) מרחב מטרי, $A \subset X$ נקראת ε-רשת אם $X = \bigcup_{x \in A} D_\varepsilon(x)$

למה לכל מרחב מטרי X קומפקטי סקבנציאלית ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת ε-רשת סופית

הוכחה: נקח $x_1 \in X$, נסתכל ב- $D_\varepsilon(x_1)$ אם $D(x_1)=X$ $\{x_1\}$ ε-רשת
אם $D_\varepsilon(x_1) \neq X$ נקח $x_2 \notin D_\varepsilon(x_1)$. אם $X = D_\varepsilon(x_1) \cup D_\varepsilon(x_2) \leftarrow \{x_1, x_2\}$
אם $D_\varepsilon(x_1) \cup D_\varepsilon(x_2) \neq X$ נקח $x_3 \notin D_\varepsilon(x_1) \cup D_\varepsilon(x_2)$
טענה: התהליך מסתיים.
(נניח שהסדרה נמשכת עד אינסוף. $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$

משפט: כל מרחב מטרי קומפקטי סקבנציאלית מקיים S_2.

הוכחה: נראה כי X הוא sep ($S_2 =$ במרחב מטרי)
נקח A_n - $\frac{1}{n}$-רשת סופית
$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ - צפופה ב-X

משפט: יהי X מרחב מטרי, אז: X קומפקטי $\Leftrightarrow$ X קומפקטי סקבנציאלית.

הוכחה: $\Leftarrow$: ק"ס $\Rightarrow S_2 \Rightarrow$ ק'
$\Rightarrow$: ק' $\Rightarrow S_2 \Rightarrow$ ק"ס (לא הוכחנו עדיין)

משפט: מרחב מטרי קומפקטי הוא חסום

הוכחה: נקח 1-רשת סופית A_1 אז המרחק בין כל שתי נקודות הוא קטן מ- $\sum_{1 \le i < j \le n} \rho(x_i, x_j) + 2 \cdot |A_1|$
$\{x_1, \dots, x_n\}$

משפט: (מסקנה) $A \subset \mathbb{R}^n$ קומפקטית $\Leftrightarrow$ A סגורה וחסומה

הוכחה: A קומפקטית $\Leftarrow$ A חסומה

$\Leftarrow$ A סגורה לפי T_2

נניח ש-A סגורה וחסומה. נבדוק שהיא קומפקטית סקוונציאלית.
מכל סדרה ניתן לבחור תת-סדרה מתכנסת $\{\vec{x}_n\}$

$\{\vec{x}_n\}$, $\{(x_n)_1\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ - חסומה $\Leftarrow$ $\{(x_{n_k})_1\}$ $\Leftarrow$ $(x_0)_1$ - סדרת קורדינטות ראשונות

נסתכל בסדרה חדשה:

$\{\vec{x}_{n_k}\}\subset\mathbb{R}^n$, $(x_{n_k})_2$ ניקח תת-סדרה של $\lim((x_*)_2)=(x_0)_2$

$\vec{x}_0\in A$. $\lim(\vec{x}_n)$

קומפקטיות: $S^{n-1}_r\subset\mathbb{R}^n = \{x_1^2+\dots+x_n^2=r^2\}$ קומפקטי

$D^n_r\subset\mathbb{R}^n$

~~תזכ~~ $\boxed{\text{תזכורת}}$ לקומפקטיות $\Leftarrow S_2$ ~~המ"ט~~ דמרחק מטרי: ק' $\Leftarrow$ קיימת לכל $0<\varepsilon$ ε-רשת סופית $\Leftarrow Sep \Leftarrow S_2$

משפט: יהי X קומפקטי. $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה

אזי (א) f חסומה

(ב) קיים $x_{max}\in X$, $x_{min}\in X$

$f(x_{max})=\max_{x\in X}f(x)$ $\quad$ $f(x_{min})=\min_{x\in X}f(x)$

הוכחה: $f(X)\subset\mathbb{R}$ - תת קבוצה קומפקטית
סגורה, חסומה

למה (Lebesgue)

יהי X מרחב מטרי קומפקטי, $X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ כיסוי פתוח. אזי
קיים $0<\varepsilon$ כך שכל כדור $D_\varepsilon(x)$ נמצא בתוך
אחת הקבוצות U_α

הוכחה: $X=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$ תת-כיסוי סופי:

נגדיר $F_i=X\setminus U_i\neq\emptyset$ - סגורה. פונקציה $f_i:X\to\mathbb{R}$ $f_i(x)=\min_{y\in F_i}\rho(x,y)$

(א) רציפה לגבי y (תרגיל)

(ב) F_i קומפקטית

(ג) f_i רציפה (תרגיל)

גם רציפה: $f(x)=\max_{i\in 1,\dots,n} f_i(x)$

f חיובית ממש

$\Big[\ \bigcup U_i \neq X \Leftarrow \bigcap F_i\neq\emptyset\ ,\ x\in F_i,\ i\in\{1,\dots,n\} \Leftarrow f_i(x)=0\ \Big]$

קיים $\min_{x\in X} f(x)=\varepsilon>0$ ט

נקח $x\in X$, $D_\varepsilon(x)$. $\varepsilon\le\max_{i\in\{1,\dots,n\}}\rho(x,F_i)$, קיים i

כך, ש- $\varepsilon\le\rho(x,F_i)$ אז הכדור הזה

אינו נפגש עם F_i $\Leftarrow$ $D_\varepsilon(x)\cap F_i=\emptyset$

לכן: $D_\varepsilon(x)\subset U_i$ כנדרש.

<u>הגדרה:</u> X מרחב מטרי, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ נקראת סדרת Cauchy

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש- $\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$,

$m,n\ge N$

<u>הגדרה:</u> מרחב מטרי נקרא <u>שלם</u> אם כל סדרת Cauchy מתכנסת.

<u>משפט:</u> יהי X מרחב מטרי, אז X קומפקטי $\Leftrightarrow$ (k) X שלם (ו) חסום לחלוטין

(*) (חסום לחלוטין = לכל $\varepsilon>0$ קיימת ε-רשת סופית)

<u>הוכחה</u> $\Leftarrow$ X קומפקטי אזי X שלם [קיים, מכל סדרה

ניתן לבחור תת סדרה מתכנסת $\Leftarrow$ סדרת C מתכנסת כולה

לאותו גבול (2)

נקח $\varepsilon>0$, $X=\bigcup_{x\in X}D_\varepsilon(x)$ כיסוי פתוח $\Leftarrow$ $X=\bigcup_{i=1}^{n}D_\varepsilon(x_i)$

$\Rightarrow$ בודקים קומפקטיות סדרתית. נקח סדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty$

נבנה תת-סדרה Cauchy: נקח 1-רשת סופית

$X=\bigcup_{k=1} D_1(y_k)$. מכיל $D_1(y_1)$ אינסוף נקודות הסדרה-

תת סדרה אינסופית.

נקח $\frac{1}{2}$-רשת סופית $\Leftarrow$ קיים $D_{\frac{1}{2}}(y_2)$ כך ש-

$D_1(y_1)\cap D_{\frac{1}{2}}(y_2)$ מכיל תת סדרה אינסופית

ממשיכים... ובסוף מקבלים סדרת Cauchy!

מכפלה של מרחבים טופולוגיים

<u>הגדרה:</u> X,Y קבוצות $X\times Y = \{(x,y) : x\in X,\ y\in Y\}$

$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : x_\alpha\in X_\alpha\}$

<u>הגדרה:</u> יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. נגדיר ב- $X\times Y$ טופולוגיה ע"י פרי-בסיס (תת-בסיס) $\{U\times Y : U\subset X \text{ פתוחה}\}\cup\{X\times U : U\subset Y \text{ פתוחה}\}$

<u>הגדרה:</u> $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ אוסף מרחבים טופולוגיים, נגדיר טופולוגיה ב- $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ של ע"י פרי-בסיס $\left\{\prod_{\alpha\in A,\ \alpha\neq\beta} X_\alpha\times U_\beta ,\ U_\beta\subset X_\beta\right\}$

<u>למה:</u> בסיס לטופולוגיית המכפלה ב- $X\times Y$ הוא
$\{U\times V \mid U\subset X,\ V\subset Y \text{ פתוחות}\}$ בסיס. לטופולוגיית המכפלה

במקרה כללי: $\left\{\prod_{\alpha\in A,\ \alpha\neq\beta_1,\dots,\beta_n} X_\alpha\times U_{\beta_1}\times\dots\times U_{\beta_n}\right\}$

<u>הגדרה:</u>
$p_1: X\times Y\to X$ $\quad p_1(x,y)=x$
$p_2: X\times Y\to Y$ $\quad p_2(x,y)=y$
$p_\beta:\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\to X_\beta$ $\quad p_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in A})=x_\beta$

<u>למה:</u> (1) הטלות הן העתקות רציפות (2) טופולוגיית מכפלה היא מינימלית מבין הטופולוגיות ב- $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ כך שכל הטלות רציפות.

<u>הוכחה:</u> $p_\beta:\prod_\alpha X_\alpha\to X_\beta$, $U\subset X_\beta$

$\prod_{\alpha\neq\beta} X_\alpha\times U = p_\beta^{-1}(U)$ קבוצות מהתת בסיס שהגדרנו

(2) כל p_α רציפה, א/ז $p_\alpha^{-1}(U)$ חייבת להיות פתוחה, לכל $U\subset X_\alpha$ פתוחה.

<u>למה:</u> הטלות הן <u>העתקות פתוחות</u>. הוכחה: תמונות של קבוצות פתוחות בסיסיות הן פתוחות.

<u>דוגמאות:</u> (1) $\mathbb{R}^2$ טופולוגיה מטרית = טופולוגית מכפלה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(2) ב- $\mathbb{R}^n$ טופולוגיה מטרית = טופולוגית המכפלה $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{\mathbb{R}-n}$

<u>למה</u> X,Y מ"ט לכל $x_0\in X$ נגדיר $i_{x_0}: Y\to X\times Y$
$i_{x_0}(y)=(x_0,y)$ לכל $y_0\in Y$ נגדיר $i_{y_0}: X\to X\times Y$
$i_{y_0}(x)=(x,y_0)$. i_{x_0}, i_{y_0} הומיאומורפיזם על התמונה.

<u>הוכחה</u>: ההעתקות חח"ע ועל. נבדוק רציפות
$\{x_0\}\times Y$ הטופולוגיה המושרית:

$$(U\times V)\cap(\{x_0\}\times Y)=\begin{cases}\emptyset & x_0\notin U\\ \{x_0\}\times V\end{cases}$$

התאמה חח"ע ועל בין הקבוצות הפתוחות
(מספיק להראות לקבוצות בסיסיות) סיימנו.

<u>משפט</u>: X,Y , $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$

(1) אם X,Y קשירים אז $X\times Y$ קשירה
אם $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ " " $\prod$ קשירה

(2) קשירים מסילתית ⇐ המכפלה קשירה
(3) מקיימים T_2 ⇐ המכפלה T_2
(4) מס' ~~בן מנייה~~ סופי או בן מנייה של קבוצות מקיים S_2 ⇐ המכפלה מקיימת S_2
(5) . אם מס' סופי או בן מנייה מקיים Sep ⇐ המכפלה Sep
(6) ~~אם~~ משפט Tikhonov
$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ קומפקטיות ⇐ $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ קומפקטי

(7) $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מטריות או סופיות ⇐ המכפלה מטרית