הרצאה 7.5 - ~~[illegible]~~ הרצאת השלמה

הערה - "אם אתם לחוצים מהמבחן.. נו, יהיה בסדר" - י. שוסטין

המשך הוכחת למת אוריסון: כל מרחב רגולרי ו-S_2 הוא מטריזבילי.

הוכחנו טענת עזר - מרחב רגולרי ו-S_2 הוא נורמלי.

מרחב כזה מקיים גם את F_4: אם $F,G\subset X$ סגורות זרות, אז קיימת $f:X\to[0,1]$
כך ש- $f|_G\equiv 1$, $f|_F\equiv 0$ (רציפה), (F_4 נובע מנורמליות ממשפט אוריסון).

אנחנו נבנה שיכון $\phi: X\to I^\infty$ שהוא הומיאומורפיזם על התמונה:

יהי $\mathcal{B}$ בסיס טופולוגיה ב-X בן מנייה (קיים מ-S_2).

נסמן ב-$\tilde{\mathcal{B}}$ את: $\tilde{\mathcal{B}}=\{(u,v)\mid u,v\in\mathcal{B}\setminus\{\emptyset\},\ cl(u)\subset v\}$

גם $\tilde{\mathcal{B}}$ בת מנייה.

נסתכל בהעתקה $\phi: X\to I^{\tilde{\mathcal{B}}}=I^\infty$

$\phi(x)=(f_{(u,v)}(x))$

כאשר $f:X\to[0,1]$, $f|_{cl(u)}=0$, $f|_{X\setminus v}=1$ ← קיים מ-F_4

(כלומר, ~~[illegible]~~ $\phi(x)$ בקואורדינטה (u,v) היא $f_{(u,v)}(x)$ כאשר)

א) ϕ רציפה מכיוון שכל $f_{(u,v)}$ רציפה.

ב) ϕ חח"ע: ניקח $x\neq y\in X$.

קיימות סביבות בסיסיות זרות $x\in v,\ y\in v'$

לפי רגולריות קיימת $\underbrace{X\setminus v\subset u'}_{\text{סביבה פתוחה}}$, $\underbrace{x\in u}_{\text{סביבה בסיסית}}$

כך ש- $u\cap u'=\emptyset \Rightarrow cl(u)\subset v$

אז $f_{(u,v)}(x)=0$, $f_{(u,v)}(y)=1$, אז ϕ חח"ע.

ג) ϕ העתקה פתוחה על התמונה, ולכן הומיאומורפיזם. נוכיח:

ניקח נקודה $x\in X$, סביבה בסיסית $x\in v$.

קיימת תת סביבה בסיסית $x\in u$ כך ש- $cl(u)\subset v$

ופונקציה רציפה $f_{(u,v)}:X\to[0,1]$, $f_{(u,v)}(x)=0$, $f_{(u,v)}(X\setminus U)\equiv 1$

נסתכל על הקבוצה:

$\tilde{u}=\{z\in I^{\tilde{\mathcal{B}}}\mid z_{f(u,v)}<1\}$

z בקואורדינטה שמתאימה ל- $f_{(u,v)}$

קבוצה זו פתוחה (למה? תחשבו)

$\phi(x)\in\tilde{u}$ ~~[illegible]~~. $\underbrace{\tilde{u}\cap\phi(X)}_{\text{פתוחה ב-}\phi(X)}\subset\phi(v)$ (תרגיל)

$\square$

מרחב מנה (quotient)

הגדרה - יהי X מ"ט, $\Sigma = \{A_\alpha \mid \alpha\in A\}$
כך ש- $A_\alpha \subset X$, $A_\alpha\cap A_\beta=\emptyset$, $X=\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$
כלומר Σ חלוקה של המרחב לתתי קבוצות זרות.

נגדיר קבוצה $X/\Sigma = \{[A_\alpha] \mid \alpha\in A\}$
← איבר אחד ב- X/Σ

יש העתקה $P: X\to X/\Sigma$ העתקה
$P(x)=[A_\alpha]$, $x\in A_\alpha$

נגדיר $\{U\subset X/\Sigma \mid P^{-1}(U)\ \text{פתוחה ב-}X\} = \Omega_{X/\Sigma} \subset 2^{X/\Sigma}$

למה - 1) $(X/\Sigma, \Omega_{X/\Sigma})$ מ"ט
2) $P: X\to X/\Sigma$ העתקה רציפה
3) $\Omega_{X/\Sigma}$ טופולוגיה המקסימלית כך ש- P רציפה.

הוכחה - 1) ...
2) לפי הגדרה
3) אם נוסיף קבוצה נוספת ל- $\Omega_{X/\Sigma}$, המקור לא פתוח, והרציפות נשברת.

הגדרה - X/Σ נקרא **מרחב מנה**
$\Omega_{X/\Sigma}$ נקראת **טופולוגיית מנה**

למה - $F\subset X/\Sigma$ סגורה $\longleftrightarrow$ $P^{-1}(F)\subset X$ סגורה

הוכחה - תרגיל.

הגדרה - $A\subset X$ נקראת **שלמה** ביחס ל- Σ אם $A'\subset A$, $A=\bigcup_{\alpha\in A'}A_\alpha$

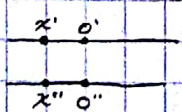
למה - 1) $A\subset X$ שלמה $\longleftrightarrow$ $A=P^{-1}(P(A))$
2) תמונה של A שלמה פתוחה/סגורה ב- X היא פתוחה/סגורה ב- X/Σ

הוכחה - משחק עם הגדרות.

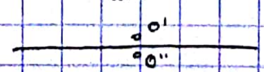
משפט - אם X מ"ט [קשיר, קשיר מסילתית, Sep, קומפקטי] אזי גם X/Σ [קשיר, קשיר מסילתית, Sep, קומפקטי] (בהתאמה).

הוכחה - $P: X\to X/\Sigma$ רציפה ועל. (ואז לכל תכונה יש משפט מתאים משמרת את המעבר)

דוגמה - $X=\mathbb{R}\sqcup\mathbb{R}$ איחוד זר של שני קווים



נקח: $\Sigma=\{(x',x'')_{x\neq 0}, 0', 0''\}$
ונקבל:



מרחב זה אינו Hausdorff.