הרצאה 7

בוחן סוף שבוע"ח - 20.12. יהיה בוחן של שעה ותרגול של שעתיים.

בחירה 3 מ-4 שאלות, כלל חומר עבר.

~~נושאים טופולוגיה, פונקציות רציפות, קשירות, אקסיומות הפרדה, אקסיומות מניה~~

$\boxed{\text{* המבחן יהיה עם מחברת פתוחה!!!}}$

נושאים - טופולוגיה
פונקציות רציפות
קשירות (+ מסילתית)
אקסיומות הפרדה
אקסיומות מניה

ציון מגן - הם יחליטו כמה אחוזים

שבוע הבא ביום שני יהיה שיעור במקום תרגול.

מכפלה של מרחבים טופולוגיים - המשך

המשך הוכחת המשפט

2) קשירות מסילתית.

טענת עזר - יהיו $X_\alpha, \alpha\in A$, Z מ"ט.

נסמן -

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha = P_\alpha \circ f"'] & \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \arrow[d, "P_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

אזי f רציפה $\longleftrightarrow$ כל f_α רציפות

הוכחת הטענת עזר - $\Leftarrow$ מהרכבה, טריוויאלי.
$\Rightarrow$ נקח $U\subset\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ פתוחה בסיסית
אזי:

$$U = U_1\times\dots\times U_n\times\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$$

ואז $f^{-1}(U) = f_1^{-1}(U_1)\cap\dots\cap f_n^{-1}(U_n)$

קיבלנו חיתוך סופי של קבוצות פתוחות. אז זה פתוח.

הוכחת המשפט - $x=(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $y=(y_\alpha)_{\alpha\in A}$

נבנה מסילות:

$\varphi_\alpha:[0,1]\to X_\alpha$, $\varphi_\alpha(0)=x_\alpha,\ \varphi_\alpha(1)=y_\alpha$

וגם

$\varphi:[0,1]\to\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$, $\varphi=(\varphi_\alpha)$

φ היא המסילה הנדרשת.

משפט - $X\times Y$, $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$:

1) אם X,Y קשירים, $X\times Y$ קשירה (וגם $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$)
2) אם X,Y קשורים מסילתית אז $X\times Y$ קשירים מסילתית (וגם $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$)
3) אם X,Y T_2 אזי $X\times Y$ T_2 (וגם $\prod X_\alpha$)
4) אם X,Y מקיימת S_2 אזי $X\times Y$ S_2 (וגם $\prod X_\alpha$ רק במקרה הבן מנייה)
5) אם X,Y מקיימים ספ' אזי $X\times Y$ גם ספ' (-וו-)
6) אם X,Y קומפקטים אזי $X\times Y$ קומפקטית (משפט Tichonov: $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ גם קומפקטית)
7) אם X,Y מטרים, אזי $X\times Y$ מטריזבילי (גם $\prod X_\alpha$ רק במקרה הבן מניה)

<u>הוכחה</u>

1) קשירות

טענת עזר: יהי Z מרחב טופולוגי ולכל $z_1,z_2\in Z$ קיימת תת' $A\subset Z$ קשירה כך ש- $z_1,z_2\in A$. אזי Z קשיר.
הוכחה - תרגיל.

הוכחת המשפט - (א) $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$. נקח $X\times\{y_1\}\cup\{x_2\}\times Y$
המקשירים,
וגם - $(x_2,y_1)\in X\times\{y_1\}\cap\{x_2\}\times Y$
ולכן ה'צלב' הנ"ל קשיר. ומהלמה המשפט מתקיים.

(ב) נניח בשלילה $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = U\cup V$, U,V פתוחות זרות ולא ריקות

$$U_1\times U_2\times U_3\dots\times U_n\times\prod_{\alpha\neq 1\dots n} X_\alpha\subset U$$

$$V_1\times V_2\times\dots\times V_n\times\prod_{\alpha\neq 1\dots n} X_\alpha\subset V$$

$$U_1\times\prod_{\alpha\neq 1}X_\alpha=(U_1\times X_2)\times\prod_{\alpha\neq 1,2}X_\alpha$$

$$V_2\times\prod_{\alpha\neq 2}X_\alpha=(X_1\times V_2)\times\prod_{\alpha\neq 1,2}X_\alpha$$

נקח $x=(x_1,\dots x_n,z_\alpha)\in U$, $y=(y_1,\dots y_n,z_\alpha)\in V$

אז- $x,y\in\overbrace{\underbrace{X_1\times\dots\times X_n}_{\text{הומאומורפי ל:}}\times\{(z_\alpha)\}}^{Z}$

$X_1\dots X_n$ $\rightarrow$ קשיר לפי אינדוקציה

אבל $Z=(Z\cap U)\cup(Z\cap V)$, סתירה.

3) האוסדורף

נקח $x \neq y \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

יש α כך ש- $x_\alpha \neq y_\alpha$ $\quad x = (\dots x_\alpha \dots)$ $\quad y = (\dots y_\alpha \dots)$

נקח סביבות פתוחות זרות $x_\alpha \in \mathcal{U} \subset X_\alpha$, $y_\alpha \in \mathcal{V} \in X_\alpha$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \phi$

אז $x \in \tilde{\mathcal{U}} = \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \times \mathcal{U}$, $y \in \tilde{\mathcal{V}} = \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \times \mathcal{V}$

סביבות $\tilde{\mathcal{U}}$, $\tilde{\mathcal{V}}$ פתוחות וזרות כדרוש.

4) S_2

א) X, Y מט. $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס בן מנייה ל- X
$\{\mathcal{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס בן מנייה ל- Y

נקח $\{\mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_m\}_{n,m=1,2\dots} \leftarrow$ בסיס ל- X, Y

ב) $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, $\{\mathcal{U}_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס ל- X_i

אז $\{\mathcal{U}_{n_1}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{U}_{n_m}^{(m)} \times \prod_{i=m+1}^{\infty} X_i\}_{m=1,2,\dots}$ בן מנייה

5) ספרביליות

א) $A \subset X$, $B \subset Y$ צפופות בנות מנייה.

$A \times B \subset X \times B$ צפופה ובת מניה

ב) $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, $A_i \subset X_i$

$A \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i = \{(a_1, a_2, \dots a_m, x_{m+1}^{(0)} \dots)\}$, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_m \in A_m$ צפופה ובת מנייה

$X_0 = (x_i^{(0)})$ -נקודה קבועה.

7) ~~[illegible]~~
מטריזביליות

א) $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$, $d_2 : Y \times Y \to \mathbb{R}$ מטריקות.

נגדיר מטריקה על $X \times Y$: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = max(d_1(x_1,x_2), d_2(y_1,y_2))$
קיימות אפשרויות נוספות - כמו סכום, נורמה אוקלידית, וכו'.

ב) $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, $d_i : X_i \times X_i \to \mathbb{R}$

נגדיר מטריקה - $d((x_i),(y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$

תרגיל - להראות שזו מטריקה מתאימה.

16 קומפקטיות

(א) X,Y קומפקטיים. $X\times Y=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{U}_\gamma$ כיסוי פתוח

נשים לב ש- $\mathcal{U}_\gamma$ איחוד של קבוצות בסיסיות. אז נוכל לעדן כל כיסוי פתוח
לכיסוי של הקבוצות הבסיסיות, ומספיק להוכיח על הכיסוי החדש.
נניח מראש שכל $\mathcal{U}_\gamma$ בסיסית:

$$V_\gamma\times W_\gamma=\mathcal{U}_\gamma \quad , \quad V_\gamma\in X,\ W\in Y$$

נקח נקודה $x\in X$.
נסתכל על הסיב $\{x\}\times Y\approx Y$ קומפקטי
$\{x\}\times Y\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{U}_\gamma$
אז קיים $\{x\}\times Y\subset\bigcup_{i=1}^{n}(V_i\times W_i)$ כיסוי סופי
ויהי - $x\in\bigcap_{i=1}^{n}V_i=V_x$. אז $V_x\times\bigcup_{i=1}^{n}W_i\subset\bigcup_{i=1}^{n}(V_i\times W_i)$
אז -
$$X=\bigcup_{j=1}^{m}V_{x_j} \leftarrow X=\bigcup_{x\in X}V_x$$

אז יש מספר סופי של "בסים" שמכסה ע"י מספר סופי של קבוצות
ולכן יש כיסוי סופי של $X\times Y$.

משפט Tikhonov -
יהיו X_α מ"ט קומפקטיים. אזי $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ קומפקטית.

הוכחה - נשתמש בקריטריון המבוסס על מערכת מרוכזות של תתי-קבוצות סגורות.
הקריטריון אומר שאם יש אוסף קבוצות סגורות כך שכל חיתוך סופי שלהן לא ריק,
אז החיתוך של כולן לא ריק $\rightarrow$ היא קומפקטית.

תהי $\mathcal{B}$ - מערכת מרוכזת של תתי קבוצות ב- $\prod_{\alpha\in A}$ (שכל חיתוך סופי לא ריק)

טענה - בקבוצת המערכות המרוכזות הכוללות את $\mathcal{B}$ קיימת מערכת מקסימלית.

הוכחה - בעזרת הלמה של Zorn

אז נעבור מ- $\mathcal{B}$ ל- $\mathcal{B}^{max}$

לכל $\alpha\in A$, נסתכל על $P_\alpha(\mathcal{B}^{max})$ מערכת מרוכזת ב- X_α

נעבור לקבוצות סגורות - $\{cl(B)\mid B\in P_\alpha(\mathcal{B}^{max})\}$
קבוצה זו היא עדיין מערכת מרוכזת.

כיוון ש- X_α קומפקטי, קיימת $x_\alpha\in\bigcap cl(B)$, $B\in P_\alpha(\mathcal{B}^{max})$

המטרה - $\bigcap_{B\in\mathcal{B}^{max}}cl(B)\neq\emptyset$

נוכיח ש- $(x_\alpha)_{\alpha\in A}\in\bigcap_{B\in\mathcal{B}^{max}}cl(B)$

נבדוק שלכל $B\in\mathcal{B}^{max}$ וכל סביבה של $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ החיתוך של B עם הסביבה לא ריק.

איך? טריק במשפט הבא

המשך הוכחה

א) $U_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta$, $x_\alpha \in U_\alpha$

אזי $(U_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta) \cap B \neq \phi \iff U_\alpha \cap p_\alpha(B) \neq \phi$

לכן גם זה נכון ⟵ נכון כי לפי הבנייה $x_\alpha \in cl(p_\alpha(B))$

אזי $U_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta \in \mathcal{B}^{max}$ (ממקסימליות)

~~אזי~~ $U_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta \cap \overbrace{(B_1 \cap \dots \cap B_n)}^{B'} \neq \phi$, $\mathcal{B}^{max}$

ב) אזי $U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \dots \times U_{\alpha_m} \times \prod_{\beta\neq\alpha_1,\dots,\alpha_m} X_\beta \in \mathcal{B}^{max}$

סביבה של X_{α_1} ... סביבה של X_{α_2} ... סביבה של X_{α_m}

בסיס סביבות של $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$

ג) ולכל B $U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_m} \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta \cap B \neq \phi$

אזי $(X_\alpha)_{\alpha\in A} \in cl(B)$

$\square$

דוגמאות - $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. I^n קוביה .

$I^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} I_{(i)}$ - קומפקטי !

- $S^1 \times S^1 = T^2$ טורוס  , $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$

- $S^1 \times I$ גליל 

מטריזביליות

למה - Urysohn

כל מרחב טופולוגי רגולרי המקיים את S_2 הוא מטריזבילי

הוכחה - יהי X המ"ט הנתון.

נבנה העתקה רציפה חח"ע $f : X \hookrightarrow I^\infty$

כך ש- $f : X \to f(X)$ הומיאומורפיזם .

המטריקה ב- X תהיה הצמצום של המטריקה של I^∞

טענת עזר - מרחב רגולרי המקיים S_2 הוא נורמלי

הוכחה - נקח $F, G \subset X$ סגורות זרות

נבנה סביבות פתוחות זרות .

לכל $x \in F$ קיימות סביבות $x \in U_n$, $G \subset V_n'$

כך ש- $U_n \cap V_n' = \phi$ סביבה מבסיס בן מנ"ה

לכל $y \in G$ קיימת $y \in V_m$ סביבה בבסיס , $U_m' \supset F$, $U_m' \cap V_m = \phi$

נגדיר

$U_n'' = U_n \cap (U_1' \cap \dots \cap U_n')$, $V_m'' = V_m \cap (V_1' \cap \dots \cap V_m')$.

$U_n'' \cap V_m'' = \phi$ לכל n, m . אזי $V = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m''$, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n''$

$\cup$ G , $\cup$ F

* חיוך של שטן בסוף הבנייה הזאת היה כל כך מקסים שהתפעלתי גם לנצח