# הרצאה 8.5 - הרצאת השלמה

"נו, אני הייתי עכשיו ברוסיה, ראיתי מה זה חורף אמיתי ... ". שטיין.

**תזכורת - מרחבי העתקות**

$C(X,Y)$ - טופולוגיה קומפקטית פתוחה

משפט - $X$ קומפקטי, $Y$ מטרי. נגדיר מטריקה ב- $C(X,Y)$ : $r(f,g)=\max_{x\in X}\rho(f(x),g(x))$

אזי $\Omega_{co}=\Omega_r$

הערה - השתמשנו בהוכחה בין מרחק נקודה לבין תת קבוצה:

א - הגדרה - $Y$ מרחב מטרי, $A\subset Y,\ x\in Y$. $\rho(y,A)=\inf_{y'\in A}(y,y')$

ב - טענה - בהינתן $A\subset Y$.

הפונקציה $f_A:Y\to\mathbb{R}$

$f_A(y)=\rho(y,A)$ היא רציפה

בנוסף, אם $A$ סגורה, אזי $y\in A \longleftrightarrow \rho(y,A)=0$

הוכחה - יהי $\varepsilon>0$. נקח $y\in Y$.

נסתכל בכדור $D_y(\frac{\varepsilon}{3})$ ונבדוק כי לכל $y'\in D_y(\frac{\varepsilon}{3})$ מתקיים:

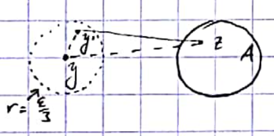
$$|\rho(y',A)-\rho(y,A)|<\varepsilon$$

לכל נק' $z\in A$ מתקיים (כי inf) -

$$\rho(y,z)\ge\rho(y,A)$$

$$\rho(y',z)\ge\rho(y,\cancel{z})-\frac{\varepsilon}{3}$$

אי״ש $\Delta$ + ציור




ולכן:

$$\rho(y',A)=\inf_{z\in A}\rho(y',z)\ge\rho(y,A)-\frac{\varepsilon}{3}$$

באותו אופן,
$$\rho(y,A)\ge\rho(y',z)-\frac{\varepsilon}{3}$$

ואז
$$\rho(y,A)=\inf_{z\in A}\rho(y,z)\ge\rho(y',A)-\frac{\varepsilon}{3}$$

ולכן
$$|\rho(y,A)-\rho(y',A)|\le\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

הראינו את החלק הראשון. החלק השני:

אם $y\in A$ אזי $\rho(y,A)=0$ אם $\rho(y,A)=0$ $\leftarrow$ כל כדור $D_y(\varepsilon)$

נפגש עם $A$ $\leftarrow$ $y\in cl(A)=A$

משפט - יהיו $X$, $X'$, $Y$, $Y'$ מרחבים טופולוגיים. $\varphi:X\to X'$, $\psi:Y\to Y'$ רציפות.

אזי ההעתקות הבאות רציפות:

$$\varphi^*: C(X',Y)\to C(X,Y)$$
$$f\longmapsto f\circ\varphi$$

$$\psi_*: C(X,Y)\to C(X,Y')$$
$$f\longmapsto \psi\circ f$$

הערה - ההעתקות $\varphi^*$, $\psi_*$ מוגדרות היטב

הוכחה בעמוד הבא

הוכחה - $\varphi^*$

נקח $\mathcal{U}(C,W)$ , $W\subset Y$ פתוחה, $C\subset X$ קומפקטית.

$$\varphi^{*-1}(\mathcal{U}(C,W)) = \{f: X' \to Y \mid f\circ\varphi \in \mathcal{U}(C,W)\} =$$

$$= \{f: X' \to Y \mid f(\underbrace{\varphi(C)}_{\text{קומפקטית}}) \subset \underbrace{W}_{\text{פתוחה}}\} = \mathcal{U}(\varphi(C), W)$$

הוכחה - $\psi_*$

נקח $\mathcal{U}(C,W)$ , $W\subset Y'$ פתוחה, $C\subset X$ קומפקטית

$$\psi_*^{-1}(\mathcal{U}(C,W)) = \{f: X\to Y \mid \psi(f(C)) \subset W\} =$$

$$= \{f: X\to Y \mid \underbrace{f(C)}_{\text{ק'}} \subset \underbrace{\psi^{-1}(W)}_{\text{פתוחה}}\} = \mathcal{U}(C, \psi^{-1}(W))$$

משפט - העתקת הערכה

$X,Y$ מ"ט, $x_0\in X$ נגדיר $F_{x_0}: C(X,Y) \to Y$

$$f \longrightarrow f(x_0)$$

זוהי העתקת הערכה.

אזי $F_{x_0}$ רציפה.

הוכחה - נקח $V\subset Y$ פתוחה.

$$F_{x_0}^{-1}(V) = \{f: X\to Y \mid f(x_0)\in V\} = \mathcal{U}(\underbrace{x_0}_{\text{קומפקטי}}, \underbrace{V}_{\text{פתוחה}})$$

דוגמה - $A\subset X$ , $in: A \hookrightarrow X$ ← שיכון

לכל מרחב טופולוגי $Y$ מקבלים העתקה רציפה $in^*: C(X,Y)\to C(A,Y)$

זו העתקת הצמצום. $f: X\to Y \longmapsto f|_A: A\to Y$

שאלה - מתי $in^*$ היא על?

## תכונות של מרחבי העתקה

משפט - אם $Y$ הוא hausdorff אזי $C(X,Y)$ hausdorff לכל $X$

הוכחה - $f_1,f_2\in C(X,Y)$ , $f_1\neq f_2$

קיימת $x_0\in X$ כך ש- $f_1(x_0)\neq f_2(x_0)$

$Y$ hausdorff לכן קיימות סביבות זרות $f_1(x_0)\in V_1$, $f_2(x_0)\in V_2$, $V_1\cap V_2=\emptyset$

אז $f_1\in\mathcal{U}(x_0,V_1)$

$f_2\in\mathcal{U}(x_0,V_2)$