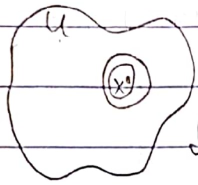
21/11/18

הרצאה מס' 12 - טופולוגיה

משפט- (X,d) מרחב מטרי ספרבילי אז $(X,d)\in C_2$.

הוכחה- $\mathcal{B}\subset\Omega$ נקרא בסיס של טופולוגיה אם לכל $x\in X$ ולכל סביבה של x
$x\in U\subset\Omega$ קיים $V\in\mathcal{B}$ כך ש- $x\in V\subset U$. ניקח סדרה צפופה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
ב- X. נגדיר אוסף קבוצות $\mathcal{B}=\{B_{\frac{1}{k}}(x_n)\mid k,n\in\mathbb{N}\}$ כאמור שזה קבוצה בת מנייה,
נוכיח שזה בסיס. נקח $x\in X$, $x\in U\in\Omega$, כיוון ש- $\{x_n\}$ צפופה, אז
$x\in U$, U קבוצה פתוחה ולכן קיים k כך ש- $B_{\frac{1}{k}}(x)\subset U$, מצפיפות
של $\{x_n\}$ נובע קיים n כך ש- $d(x,x_n)<\frac{1}{3k}$ ולכן $\mathcal{B}\ni B_{\frac{1}{2k}}(x_n)\subset B_{\frac{1}{k}}(x)\subset U$



דוגמה- C_1 + ספרביליות $\not\Rightarrow C_2$.

נסתכל על $\mathbb{R}$ טופולוגיה הנוצרת ע"י בסיס הבא $\mathcal{B}=\{[a,b)\mid a<b\}$
מס' רציונליים צפופים ב- $\mathbb{R}$.
U פתוחה, קיימת $[a,b)\subset U$ ובקטע יש מס' רציונלי".
נקח $x\in\mathbb{R}$ ונסתכל על אוסף $[x,x+\frac{1}{n})$ בסיס סביבות מקומי, $\in C_1$.
נוכיח שאין בסיס בן מנייה. נניח ש- $\mathcal{B}'$ בסיס אחר כלשהו, לכל $x\in\mathbb{R}$
נסתכל על סביבה $U_x=[x,x+1)$, לפי הגדרה של בסיס יש $V_x\in\mathcal{B}'$ כך ש-
$x\in V_x\subset U_x$ (שים ♡ כי $V_x\neq V_y$ כי $x=\min_{z\in V_x}z\neq\min_{z\in V_y}z=y$) ולכן
$|\mathcal{B}'|\geq\mathbb{R}$

ומסקנה מפה שבפרט אינו מטריזבילי $\mathbb{R}_L$.

הגדרה- $s.cl(A)=\{$ הגבולות של סדרות מ-A $\}$

טענה- $s.cl(A)\subseteq\bar{A}$ ואם $X\in C_1$ אז יש שיוויון $s.cl(A)=\bar{A}$.

הגדרה- $f:X\to Y$ רציפה סדרתית אם לכל סדרה $x_n\to x$ מתקיים $f(x_n)\to f(x)$.

משפט- 1. $f\in C(X,Y)$ אז f רציפה סדרתית

2. אם $X\in C_1$ אז f רציפה סדרתית $\Rightarrow$ רציפה.

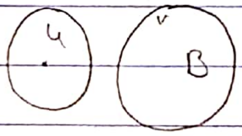
הוכחה- 1. $f\in C(X,Y)$, $x_n\to x$. נניח ש- $f(x)\in V\subset\Omega_Y$ צ"ל שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל
$n\geq N$ מתקיים $f(x_n)\in V$. $f^{-1}(V)$ פתוחה כי f רציפה, $x\in f^{-1}(V)$ לפי הגדרה

של הסדרה $x_n \to x$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in f^{-1}(V)$ כלומר $f(x_n) \in V$.

ב. צ"ל שלכל קבוצה סגורה $F \subseteq Y$, מתקיים $f^{-1}(F)$ סגורה ב-X.
מכיוון ש-$X \in C_1$, $(s.cl(A) = \bar{A})$, לכן מספיק להראות $s.cl(f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$.
ניקח $x_n \in f^{-1}(F)$, $x_n \to x$, צ"ל $x \in f^{-1}(F)$ ונסמן-
$x_n \in f^{-1} \Leftarrow f(x_n) \in F$ סגורה
f רציפה סדרתית $x_n \to x$ לכן $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$
F סגורה ולכן סגורה סדרתית ולכן $f(x) \in F$ וזהו.

דוגמה- $X = \mathbb{R}$, F סגורה אם $F = X$ או $F = \emptyset$ או F סופית, קו-בת מניה.
(קל לבדוק שזו אכן טופולוגיה). (נניח $x_n \to x$ בטופולוגיה זו,(לפי הגדרה,
לכל סביבה U של x קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ קיים רק מס' סופי של n
מהקבוצה.) (נסמן $M = \{n \mid x_n \neq x\}$ ונרשום $E = \{x_n\}_{x \in M}$
זו קבוצה בת מניה ולכן קבוצה סגורה, $x \in \mathbb{R} \setminus E$ כי סביבה של x ולכן
לפי הגדרה של התכנסות קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ $x_n \in \mathbb{R} \setminus E$, לכן כל הסדרות
המתכנסות הן קבועות החל ממקום מסוים. לכן $s.cl(A) = A$
$\forall f: X \to Y$, $f \in s.c(X,Y)$.
אם $|A| > \aleph_0$ אז $\bar{A} = X$ הכל קבוצות סגורות זה או קבוצה בת מניה
או X. ויש פונקציות לא רציפות ונפרק $X = \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ ונרשום ע"י f
מקבלת 0 לכל $\mathbb{R}_+$ ו-1 לכל $\mathbb{R}_-$

משפט- (X,Ω) רגולרי, $(X,\Omega) \in C_2$ ולכן (X,Ω) נורמלי.
הוכחה- $A, B \subset X$ סגורות- $A \cap B = \emptyset$ $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ בסיס של Ω. $x \in A$
היא סגורה של x, $x \in U \in \Omega$, כך ש- $\bar{U} \subset X \setminus B$



$U \cap V = \emptyset$, $U \subset \overset{\text{סגורה}}{X \setminus V} \subset X \setminus B$ ולכן $\bar{U} \subset X \setminus V$
כיוון ש... $U_1, \ldots, U_n$ בסיס, קיים $n = n_x$ כך ש-
$x \in U_n \subset U$, $x \in U_n \subset \bar{U}_n \subset X \setminus B$. (נגדיר $M_A = \{n \mid \bar{U}_n \subset X \setminus B\}$
$\bigcup_{n \in M} U_n \supset A$ (באופן דומה נגדיר $M_B = \{n \mid \bar{U}_n \subset X \setminus A\}$ ונקבל, $\bigcup_n U_n \supset B$
$\{V_1, V_2, \ldots\} = \{U_n\}_{n \in M_A \cap \mathbb{N}}$, $\{W_1, W_2, \ldots\} = \{U_n\}_{n \in M_B}$,
(נגדיר $\hat{V}_1 = V_1 \setminus \bar{W}_1$, $\hat{V}_2 = V_2 \setminus (\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)$, ..., $\hat{V}_k = V_k \setminus (\bigcup_{j=1} \bar{W}_j)$ ב-Ω
אלו הן קבוצות פתוחות, ולאחר מכן כבוצם להראות $\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{V}_k \supset A$
אזי, $V := \bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{V}_k \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \setminus (\bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{W}_j) = \underset{\substack{\cup \\ A}}{(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k)} \cap \underset{\substack{\cup \\ A}}{(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{W}_j^c)}$
$A \subset V$ לכ

$\hat{W}_k = W_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} \bar{V}_j\right)$, $W := \bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{W}_k \supset B$. יהיו k,l אזי-

$$\hat{W}_k \cap \hat{W}_l = W_k \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k} V_j^c\right) \cap V_l \left(\bigcap_{j=1}^{l} \bar{W}_j^c\right) = (*)$$

כעת נניח בה"כ $k \le l$, ואם כך $(*) \subset W_k \cap \bar{W}_k^c = \emptyset$

ולכן-

$$W \cap V = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{W}_k\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \hat{V}_j\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(\hat{W}_k \cap \hat{V}_j)}_{=\emptyset} = \emptyset$$

משפט של אוריסון - (X,Ω) המרחב הטופולוגי רגולרי ו- $(X,\Omega) \in C_2$ אז (X,Ω) מטריזבילי.

הוכחה- יש בסיס של טופולוגיה בן-מנייה $\{U_n\}_{n\in N}$, נגדיר-

$$M = \{(n,m) \in N \times N \mid \bar{U}_n \subset U_m\}$$

$(n,m) \in M$, $A = \bar{U}_n$, $B = X \setminus U_m$ סגורות וזרות, $A \cap B = \emptyset$ ולכן לפי למה של אוריסון, קיימת פונקציה רציפה $f \in C(X,[0,1])$ כך ש- $f|_{\bar{U}_m} = 0$, $f|_{X\setminus U_m} = 1$

(לכל (n,m) מסמנים $f_{(n,m)}$ כזו) נסמן ונגדיר $V_{n,m} = \{x \mid f_{n,m}(x) < 1\}$ פתוחה, $\{V_{n,m}\}$ בסיס

נניח $x \in X$ ואשר $x \in U \in \Omega$, כיוון ש- $\{U_k\}$ בסיס, קיים k כך ש $x \in U_k \subset U$.

U_k קבוצה פתוחה, $X \setminus U_k$ קבוצה סגורה ו $x \notin X \setminus U_k$ ולכן מרגולריות אפשר להפריד אותם. X רגולרי, קיימת V כך ש $x \in V \subset \bar{V} \subset U_k$. שוב $\{U_k\}$ בסיס ולכן קיים n כך ש-

$x \in U_n \subset V \subset \bar{V} \subset U_k \subset U$, (נסמן $m = k$), $\bar{U}_n \subset \bar{V} \subset U_k$, $(n,k) \in M$

$$f_{n,k}(x) = 0 < 1 \Rightarrow x \in V_{(n,k)}$$

$$f_{n,k}(X \setminus U_k) = 1 \Leftarrow x \notin U_k \Rightarrow x \notin V_{(n,k)} \Rightarrow V_{n,k} \subset U_k \subset U$$