הגדרה- (X,Ω) נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X $X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$, $U_\alpha\in\Omega$, קיים תת כיסוי סופי
כלומר קיימת תת קבוצה של אינדקסים $\Delta\subset A$ $|\Delta|<\infty$ כך ש- $X=\bigcup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha$

הגדרה- קבוצה $K\subset X$ ב (X,Ω) נקראת קומפקטית אם (K,Ω_K) מרחב קומפקטי כאשר Ω_K מושרית מ- Ω
כלומר לכל כיסוי פתוח של K, $U_\alpha\in\Omega$ $K\subset\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ קיים תת כיסוי סופי.
נראה כי $A=\{0,1,1/2,\dots,1/n\}$ קומפקטית אך מנגד $B=A\setminus\{0\}$ לא קומפקטית.
לכל נק' ב- B יש ε_m כך ש $\phi=(1/k-\varepsilon_k,1/k+\varepsilon_k)\cap(1/m-\varepsilon_m,1/m+\varepsilon_m)$ $k\neq m$
איחוד הקבוצה הנ"ל הוא קבוצה פתוחה אך אין לה תת כיסוי סופי

הלמה של היינה בורל- $[0,1]\subset\mathbb{R}$ קומפקטית
הוכחה- נניח U_α כיסוי. $U_\alpha\in\Omega_R$ $[0,1]\subset\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ נגדיר קבוצה $E=\{x\in[0,1]\mid [0,x]$ יש תת כיסוי סופי$\}$
ראשית נשים לב כי $E\neq\phi$ כי $0\in E$ (כי $[0,0]=\{0\}$ ובפרט יש $\alpha_0\in A$ כך ש $0\in U_{\alpha_0}$ וזה כיסוי
סופי) לכן $E\neq\phi$. נגדיר $a=\sup X$ $x\in E$ נניח כי $a<1$ (אחרת סיימנו), בפרט ש U_α מכסים
את כל הקטע $[a,1]$ קיים α_1 כך ש $a\in U_{\alpha_1}\in\Omega_R$, U_α פתוחה אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש
$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset U_\alpha$, $b=\min\{1,a+\varepsilon\}$ $b\in E$ (כי אם $x<a$ אז מהגדרת a $[0,x]$ $x=\max\{a-\varepsilon/2,0\}$
$[0,x]$ מכוסה ע"י מספר סופי של קבוצות U_α אז $[0,b]\subset[0,x]\cup[a-\varepsilon,b]$ ולכן $b\in E$
ולכן מכך ש $b\in E$ נקבל סתירה להגדרת a לכן $a=1$. ולכן $\exists\alpha_2$, $1\in U_{\alpha_1}$.
מהגדרת E $[0,1-\varepsilon/2)$ מכוסה ע"י מספר סופי של קבוצות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ $|\Delta|<\infty$ ולכן נקבל
$\cup(\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha)$, $[0,1]\subset U_\alpha$ והוא קומפקטי.

משפט- (X,Ω) מרחב טופולוגי, $K\subset X$ קומפקטית. $f\in C(X,Y)$ אז $f(K)$ קומפקטית ב- Y.
הוכחה- נסמן $A=f(K)$ ונניח כי $V_\alpha\in\Omega_Y$ מקיימת כי $A\subset\bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha$ נגדיר $U_\alpha=f^{-1}(U_\alpha)\in\Omega_X$
$K=f^{-1}(A)\subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$.
בפרט ש K קומפקטית קיימת $\Delta\subset A$ סופית כך ש $K\subset\bigcup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha$ ואז $f(K)\subset\bigcup_{\alpha\in\Delta}V_\alpha$

מסקנה- אם X,Y הומיאומורפים אז X קומפקטי $\iff$ Y קומפקטי
מסקנה- כל קטע סגור ב- $\mathbb{R}$ קומפקטי

משפט- נניח כי X מרחב קומפקטי ו $A\subset X$ קבוצה סגורה אז A קומפקטית
הוכחה- נניח כי $U_\alpha\in\Omega$, $A\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ צ"ל כי קיים תת כיסוי סופי. A סגורה ולכן $V=X\setminus A\in\Omega$ פתוחה.
נסתכל $X=V\cup(\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha)$ כיסוי פתוח של X לכן יש תת כיסוי סופי (X קומפקטית)
$\leftarrow$ קיימת $|\Delta|<\infty$ $\Delta\subset I$ כך ש $X=V\cup(\bigcup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha)$, V זר ל- A לכן מתקיים

$$A = A\cap X = \underbrace{(A\cap V)}_{=\phi} \cup \Big(A \cap \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha\Big) \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$$

טענה- (X,Ω) קומפקטי $\Leftarrow\Rightarrow$ לכל אוסף קבוצות סגורות $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כך ש- $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha=\phi$, קיימת $\Delta\subset A$, $|\Delta|<\infty$ כך ש- $\bigcap_{\alpha\in\Delta}F_\alpha=\phi$

הוכחה- ניקח $U_\alpha = X\setminus F_\alpha$ כיסוי של כל X $\Leftarrow$ יש תת כיסוי סופי $\Leftarrow$ משלים החיתוך ריק.

טענה- (X,Ω) קומפקטי $\Leftarrow\Rightarrow$ לכל $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ סגורות כך שלכל $\Delta\subset A$, $|\Delta|<\infty$ מתקיים כי $\bigcap_{\alpha\in\Delta}F_\alpha\neq\phi$ אז $\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha\neq\phi$ (הוכחה דומה לטענה הקודמת)

משפט- (X,Ω) האוסדורף ו- $K\subset X$ קומפקטית אז $K=\bar{K}$.

הוכחה- $\forall x\notin K$, $\forall y\in K$ קיימות $x\in V_x^{(y)}\in\Omega$, $y\in U_y^{(x)}\in\Omega$, $V_x^{(y)}\cap U_y^{(x)}=\phi$ (כי נתון (X,Ω) האוסדורף)

K קומפקטית וגם $K\subset\bigcup_{y\in K}U_y^{(x)}$ לכן קיימת $|\Delta|<\infty$ $\Delta\subset K$ $K\subset\bigcup_{y\in\Delta}U_y^{(x)}$.

מתקיים כי

$$(\#)\quad \Big(\bigcap_{y\in\Delta} V_x^{(y)}\Big) \cap \Big(\bigcup_{z\in\Delta} U_z^{(x)}\Big) = \bigcup_{z\in\Delta}\Big(\bigcap_{y\in\Delta} V_x^{(y)} \cap U_z^{(x)}\Big) = \phi$$

אז $V=\bigcap_{y\in\Delta}V_x^{y}$ פתוחה (חיתוך סופי),

$V\cap K=\phi$ מ-(#), $x\in V\in\Omega$ (קיבענו את x) $U=\bigcup_{y\in\Delta}U_y^{x}$ פתוחה $K\subset U$, $U\cap V$ זרות

בפרט,

$$\forall x\in X\setminus K\ \ \exists V_x,\ x\in V_x\in\Omega\ \ V_x\cap K=\phi$$

נסתכל על $V=\bigcup V_x$ $x\in X\setminus K$ זרה ל-K $V\subset X\setminus K \Leftarrow V\cap K=\phi$, V פתוחה כי זה איחוד פתוחות

$X\setminus K\subset V \Rightarrow V=X\setminus K \Rightarrow K$ סגורה.

תרגיל- להוכיח כי עבור $K_1,K_2\subset(X,\Omega)$ קומפקטיות וזרות, $(X,\Omega)\in T_2$ אזי קיימים $U,V\in\Omega$ כך ש- $U\cap V=\phi$ ו- $K_1\subset U$, $K_2\subset V$.

למעשה במהלך ההוכחה הוכחנו את המשפט הבא-

אם $K\subset X$ (X,Ω) מרחב טופולוגי K קומפקטית ו- $x\notin K$ אז קיימים $U,V\in\Omega$ כך ש- $U\cap V=\phi$ $K\subset V$, $x\in U$.

לכן אם X קומפקטי והאוסדורף $\Leftarrow$ X רגולרי.

משפט- (X,Ω_X) מרחב קומפקטי (Y,Ω_Y) מרחב האוסדורף. נניח כי $f:X\to Y$ רציפה חח"ע אזי f הומיאומורפיזם בין X ו- $f(X)$.

הוכחה- $K:=f(X)$ צ"ל כי $f^{-1}:K\to X$ רציפה, כלומר צ"ל שלכל קבוצה סגורה $F\subset X$ מתקיים $(f^{-1})^{-1}(F)$ סגורה ב-K X קומפקטית, $F\subset X$ סגורה $\Leftarrow$ F קומפקטית (ממשפט שראינו) $f=(f^{-1})^{-1}\in C(X,Y)$ לכן $f(F)$

קומפקטית ו-Y האוסדורף לכן $f(F)$ סגורה.

קומפקטיות סדרתית - הגדרה - מרחב (X,Ω) הוא קומפקטי-סדרתי אם לכל סדרה $(x_n)\subset X$ קיימת תת סדרה x_{n_k} מתכנסת. (לאיבר ב-X)

הגדרה - קבוצה $A\subset X$ תיקרא קומפקטית סדרתית אם (A,Ω_A) הוא מרחב קומפקטי-סדרתי.

משפט - נניח כי $(X,\Omega)\in C_1$ ו- $K\subset X$ קומפקטית אזי K קומפקטית סדרתית

הוכחה - נניח $(x_n)\subset K$ נטען כי קיים $y\in K$ כך שלכל $y\in U\in\Omega$ $\#\{n\mid x_n\in U\}=\infty$

נניח בשלילה שזה לא נכון, כלומר לכל $y\in K$ קיימת סביבה $y\in U_y\in\Omega$ כך ש $\#\{n\mid x_n\in U_y\}<\infty$

$K\subset\bigcup_{y\in K}U_y$, K קומפקטית ולכן קיימת $\Delta\subset K$ כך ש $|\Delta|<\infty$ וגם $K\subset\bigcup_{y\in\Delta}U_y$ ולכן

$$\mathbb{N}=\{n\mid x_n\in K\}\subset\{n\mid x_n\in\bigcup_{y\in\Delta}U_y\}=\bigcup_{y\in\Delta}\{n\mid x_n\in U_y\}$$

(איחוד סופי של קבוצות סופיות - לכן סופי) וזה בסתירה לכך ש-$\mathbb{N}$ אינסופי.

לכן קיים $y\in K$, $y\in U$ $\forall U\in\Omega$.

$X\in C_1$ לכן קיימת סדרת סביבות של y שהוא בסיס של הסביבות שלה - $U_1,U_2,\dots$ ונניח בה"כ ש $U_1\supset U_2\supset U_3\dots$ וקיים n כך ש $x_{n_1}\in U_1$, $\{n\mid x_n\in U_2\}=\infty \Leftarrow \exists n_2>n_1$ $x_{n_2}\in U_2$

$n_1<n_2<\dots$ וכך נקבל באינדוקציה סדרה x_{n_k} כך ש $x_{n_k}\in U_k$.

נבדוק כי $x_{n_k}\to y$ כלומר כי לכל סביבה U של y קיים N כך ש $y\in U_N\subset U$, $x_{n_k}\in U_k\subset U_N$