29/10/18

הרצאה מס' 5 - טופולוגיה

הגדרה-
$(X,\Omega_X),(Y,\Omega_Y)$ שני מרחבים טופולוגיים. $f:X\to Y$ רציפה אם לכל $U\in\Omega_Y$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\Omega_X$ (תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה, קבוצה פתוחה)
סימון- $f\in C(X,Y)$

נשים ♡,
טענה- $f\in C(X,Y)$ אמ"מ לכל קבוצה סגורה F ב-Y מתקיים $f^{-1}(F)$ סגורה ב-X.

הוכחה- ברור, $Y\setminus F\in\Omega_Y$ לפי הגדרה ו- $f^{-1}(Y\setminus F)=X\setminus f^{-1}(F)$ אם לכל קבוצה סגורה תמונה הפוכה סגורה אז לכל קבוצה פתוחה תמונה הפוכה פתוחה ומתקיים.

הגדרה- (X,Ω_X) (Y,Ω_Y) מרחבים טופולוגיים, $f:X\to Y$, $a\in X$ נאמר ש-f רציפה בנק' a אם לכל סביבה של $f(a)$, נאמר U, קיימת סביבה V של a כך ש- $f(V)\subset U$.
(מדויק כמו מחדו"א, סביבה זה קטע סביב a במרחק ε)

טענה- $f\in C(X,Y)$ אמ"מ לכל $x\in X$ f רציפה בנק' x.
הוכחה- אם $f\in C(X,Y)$ (נראה שהיא רציפה בכל נק'. אז לכל $x\in X$ ולכל סביבה U של $f(x)$ מתקיים $f^{-1}(U)$ קבוצה פתוחה (נסמנה ב- $V=f^{-1}(U)$) ו- $x\in f^{-1}(U)$ ולכן V סביבה של נק' x ו- $f(V)\subset U$. מכיוון הפוך, נניח ש-f רציפה בכל נק'. יהי $U\in\Omega_Y$ צריך להוכיח שתמונה הפוכה של U היא קבוצה פתוחה. יהי $x\in f^{-1}(U)$, $f(x)=b\in U$. U פתוחה לכן סביבה של b, ו-f רציפה ב-x קיימת סביבה $x\in V_x\subset\Omega_X$ כך, ש- $f(V)\subset U$ כלומר $V_x\subset f^{-1}(U)$ ו- $f^{-1}(U)=\bigcup_{x\in f^{-1}(U)} V_x$ וזו קבוצה פתוחה.

טענה- $f\in C(X,Y)$, $g\in C(Y,Z)$ אז $g\circ f\in C(X,Z)$
הוכחה- טענה ברורה מהגדרה.

טענה- $A\subset X$ $f\in C(X,Y)$ אז $f|_A\in C(A,Y)$, $\mathrm{Im} f\subset B\subset Y$ אז $f\in C(X,B)\iff f\in C(X,Y)$
הוכחה- ברור מהגדרה.

למה (הדבקה של פונקציות) - $X=A\cup B$ A,B סגורות. $f\in C(A,Y)$

$g\in C(B,Y)$ וגם $x\in A\cap B$ מתקיים $f(x)=g(x)$. $h(x)=\begin{cases} f(x) & : x\in A \\ g(x) & : x\in B \end{cases}$

מתקיים $h\in C(X,Y)$

הוכחה - $F\subset Y$ סגורה צ"ל ש- $h^{-1}(F)$ סגורה ב- X.

$$h^{-1}(F)=\{x\in X=A\cup B \mid h(x)\in F\}=\{x\in A \mid h(x)\in F\}\cup\{x\in B \mid h(x)\in F\}$$

$$=f^{-1}(F)\cup g^{-1}(F)$$

$f^{-1}(F)$ סגורה בטופולוגיה מושרה של תת מרחב A. ומכך ש-A סגורה היא סגורה ב- X. כנ"ל לגבי $g^{-1}(F)$.

הגדרה - $(X,\Omega_X),(Y,\Omega_Y)$ מרחבים טופולוגיים, $f:X\to Y$ נקראית הומיאומורפיזם אם f חח"ע, על, f רציפה ($f\in C(X,Y)$), $f^{-1}\in C(Y,X)$ גם כן רציפה.

דוגמאות - $x^3, \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\arctan(x), \mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $2x+1, \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

הגדרה - שני מרחבים טופולוגיים הם הומיאומורפיים אם קיים הומיאומורפיזם ביניהם, סימון - $X\sim Y$.

ברור שזהו יחס שקילות - אם $X\sim Y$, $Y\sim Z$ $\Rightarrow$ $X\sim Z$. צריך להסתכל על הרכבה מתאימה (טרנזיטיביות) באופן דומה סימטרי $X\sim Y \Rightarrow Y\sim X$ לוקחים פונקציה הפוכה ורפלקסיביות ברור.

הקשירות-

הגדרה- מרחב טופולוגי X נקרא קשור אם לכל הצגה $X=A\cup B$ כך ש- $A,B\in\Omega_X$, $A\cap B=\emptyset$ מתקיים - או $A=\emptyset$, $B=X$ או להיפך. (פירוק מעין)

האם $[0,1)$ ו- $\mathbb{R}$ הומיאומורפיים או $(0,1)$, $[0,1)$.

לא, כי אם מורידים נק' מקבלים במקרה אחד מרחב קשור ובמקרה שני מרחב לא קשור. הומיאומורפיזם שומר על תכונת הקשירות.